SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Finaltävling i Uppsala den 24 november 2007

Förslag till lösningar

Problem 1. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} xyzu - x^3 = 9 \\ x + yz = \frac{3}{2}u \end{cases}$$

i positiva heltal x, y, z och u.

Lösning: Eftersom x är en delare till VL i ekv 1, finns bara möjligheterna $x = 1$, $x = 3$ och $x = 9$. Från ekv 2 får vi $yz = \frac{3}{2}u - x$, vilket visar att u är ett jämnt heltal. Insättning i ekv 1 ger $x(\frac{3}{2}u - x)u - x^3 = 9$ eller

$$(\frac{3}{2}u - x)u = x^2 + \frac{9}{x}.$$

Fallet $x = 1$: Vi har ekvationen

$$(\frac{3}{2}u - 1)u = 10.$$

De enda jämna delarna till 10 är 2 och 10, men för $u = 2$ är $VL < 10$, för $u = 10$ är $VL > 10$.

Fallet $x = 3$: Vi får ekvationen

$$(\frac{3}{2}u - 3)u = 12.$$

Jämna delare till 12 är 2, 4, 6 och 12; $u = 2$ ger $VL = 0$, $u = 4$ är en lösning, medan $u = 6$ och $u = 12$ ger VL-värden som överstiger 12.

Fallet $x = 9$: Ekvationen blir

$$(\frac{3}{2}u - 9)u = 82.$$

Enda jämna delare till 82 är 2 och 82; $u = 2$ gör VL negativt och $u = 82$ ger $VL > 82$.

Sammanfattningsvis får vi $x = 3$, $u = 4$, som insatta i ekv 2 ger $yz = 3$ med lösningarna $(y, z) = (1, 3)$ och $(y, z) = (3, 1)$.

Svar: $(x, y, z, u) = (3, 1, 3, 4)$ och $(3, 3, 1, 4)$.

Problem 2. Ett antal blommor fördelas mellan n personer så att den förste av dem, Andreas, får en blomma, den andre får två blommor, den tredje får tre blommor osv, till person nr n som får n blommor. Andreas går sedan runt och skakar hand en gång med var och en av de övriga, i godtycklig ordning. Därvid får han en blomma från var och en som han hälsar på och som har fler blommor än han själv i det ögonblick de skakar hand. Vilket är det minsta antalet blommor som Andreas kan ha när han har skakat hand med alla?

Lösning. Antalet sätt att ordna dem som skakar hand med Andreas är ändligt, så det måste finnas ett minsta möjliga antal blommor. Låt oss numrera personerna från 2 till n i den ordning som de skakar hand med Andreas och låt $k_2, k_3, \ldots, k_n$ vara den permutation (ordning) av talen $2, 3, \ldots, n$ som motsvarar respektive antal blommor i startläget (Andreas möter alltså först person nr 2, som från början är försedd med k_2 blommor, därefter person nr 3, som i utgångsläget har k_3 blommor osv). Låt N vara antalet blommor som Andreas har när han har skakat hand med alla.

Antag att det finns ett index i sådant att $k_i < k_{i+1}$. Ett sådant index existerar för varje permutation skild från $n, n-1, \ldots, 3, 2$. Person nr i har alltså $a = k_i$ blommor från början, medan person nr $i+1$ har $b = k_{i+1}$ blommor, där $a < b$. Vi ska visa att man genom att låta personerna i och $i+1$ byta antalet blommor, dvs så att person nr i har b blommor och person nr $i+1$ har a blommor, antingen lämnar N oförändrat eller minskar det.

Låt m vara det antal blommor Andreas har när han kommer fram till person nr i. Om $m < a-1$ kommer Andreas att få en blomma av såväl nr i som av nr $i+1$. Detta gäller även om vi låter antalet blommor för de båda byta plats. Om $m = a-1$ kommer Andreas att få blommor av båda, men om nr i i stället har b blommor och nr $i+1$ har a blommor kommer Andreas bara att få en blomma (vi har då $m < b$ men $m+1 = a$), dvs en minskning med en blomma. Om $a \leq m < b$ får Andreas inte någon blomma av nr i, men däremot en av nr $i+1$. Om de båda personerna byter antal blommor med varandra kommer Andreas att få en blomma av den förste men inte av den andre. Totala antalet blommor som Andreas får är alltså oförändrat. Om slutligen $m \geq b$ kommer ingen av de båda att ge Andreas någon blomma; detta gäller även om antalet blommor skiftar mellan de båda.

Sammanfattningsvis kommer ett skifte av blomantal mellan personerna i och $i+1$ antingen hålla N-värdet oförändrat eller minska det med 1. Detta betyder att om vi upprepade gånger låter blomantalen byta plats för två personer i följd, där den senare har fler blommor än den förre, kommer N att minska eller ligga konstant. Om vi fortsätter med att skifta blomantal på detta sätt kommer vi efter ett ändligt antal steg nå den permutation som innebär att talen $2, 3, \ldots n$ bildar en monotont avtagande följd ("slutföljden"): $n, n-1, \ldots, 3, 2$. För varje blomantalsbyte kommer nämligen P_n = antalet par av personer i, j, med $i < j$, för vilka $k(i) < k(j)$ (vi uppdaterar permutationen $k_2, k_3, \ldots, k_n$ i varje steg), att minska med 1 i varje steg tills P_n antar värdet 0, vilket gäller om och endast om permutationen är lika med slutföljden. Oavsett vilken permutation vi startar med kommer proceduren att leda oss till slutföljden, dvs värdet på N för denna följd är mindre eller lika med värdet för varje annan följd. För slutföljden gäller att om n är udda får Andreas $(n-1)/2$ blommor, vilket ger $N = (n+1)/2$; om n är jämnt får han $(n+1)/2$, dvs $N = (n+2)/2$ blommor.

Anm. Eftersom inte varje steg i proceduren ger en minskning av N, kan minimum ha antagits innan slutföljden har nåtts. Som exempel kan nämnas att om Andreas skakar hand med fem andra, som i tur och ordning har $6, 5, 4, 3, 2$ blommor får Andreas sammanlagt 4 blommor. Samma antal får han exempelvis för ordningen $4, 5, 6, 3, 2$.

Svar: $(n+1)/2$ om n är udda, $(n+2)/2$ om n är jämnt

Problem 3. Låt α, β, γ vara vinklarna i en triangel. Om a, b, c är triangelns sidlängder och R är den omskrivna cirkelns radie, visa att

$$\cot\,\alpha + \cot\,\beta + \cot\,\gamma = \frac{R(a^2+b^2+c^2)}{abc}. \quad \big(\cot\,x = \frac{\cos\,x}{\sin\,x}\big)$$

Lösning. Enligt sinussatsen använd på triangeln är (a kan väljas att stå mot α osv)

$$\frac{a}{\sin\,\alpha} = \frac{b}{\sin\,\beta} = \frac{c}{\sin\,\gamma} = 2R.$$

Vänsterledet i uppgiften kan nu skrivas

$$\begin{aligned}\frac{\cos\,\alpha}{\sin\,\alpha} + \frac{\cos\,\beta}{\sin\,\beta} + \frac{\cos\,\gamma}{\sin\,\gamma} &= 2R\big(\frac{\cos\,\alpha}{a} + \frac{\cos\,\beta}{b} + \frac{\cos\,\gamma}{c}\big)\\ &= \frac{R}{abc}\big(2bc\cdot\cos\,\alpha + 2ac\cdot\cos\,\beta + 2ab\cdot\cos\,\gamma\big).\end{aligned}$$

Enligt cosinussatsen använd på triangeln är $a^2 = b^2+c^2-2bc\cdot\cos\,\alpha$, $b^2 = a^2+c^2-2ac\cdot\cos\,\beta$ och $c^2 = a^2+b^2-2ab\cdot\cos\,\gamma$, varför vänsterledet övergår i

$$\begin{aligned}&\frac{R}{abc}\big((b^2+c^2-a^2)+(a^2+c^2-b^2)+(a^2+b^2-c^2)\big)\\ &= \frac{R(a^2+b^2+c^2)}{abc}.\end{aligned}$$

Likheten är därmed visad.

Problem 4. På randen till en cirkelskiva finns ett antal bågar. Varje par av bågar har minst en punkt gemensam. Visa att man på cirkeln kan välja två diametralt motstående punkter sådana att varje båge innehåller minst en av dessa två punkter.

Lösning. För en godtycklig punkt P med *antipoden* (dvs den diametralt motstående punkten) Q, gäller att bågar som är $\geq 180°$ automatiskt innehåller någon av dessa punkter. Låt oss därför anta att alla bågar är $< 180°$.
Välj en punkt C_1 som tillhör minst en av bågarna och låt C_2 vara punktens antipod. Mängden av bågar kan nu delas in i tre disjunkta delmängder: M_1, M_2 och M_3, där M_1 är mängden av alla bågar som innehåller punkten C_1, M_2 är mängden av alla bågar som innehåller punkten C_2 och M_3 är mängden av alla bågar som varken innehåller C_1 eller C_2. De båda punkterna delar upp cirkeln i två halvcirklar . Vi inser att eventuella bågar i M_3 endast kan finnas i den ena av dessa halvcirklar, eftersom bågar från skilda halvcirklar inte kan ha någon punkt gemensam. Låt S vara den halvcirkel som innehåller eventuella bågar från mängden M_3 och låt S' vara den andra halvcirkeln. Om mängden M_3 är tom, kan C_1 och C_2 väljas som punkterna A_1 och A_2 respektive.
Betrakta mängden av bågar i M_1 (mängden är ju icke tom). Låt B_1 vara den båge B i M_1 för vilken $B \cap S$ är kortast och antag att $B_1 \cap S =$ bågen C_1A_1. Vi ska visa att A_1 och dess antipod A_2 uppfyller uppgiftens villkor.
Valet av punkten A_1 gör det klart att varje båge från M_1 innehåller denna punkt. Vidare måste varje båge i mängden M_3 ha en icke tom skärning med B_1, och följaktligen tillhör A_1 varje sådan båge.
Kvar har vi bågarna i mängden M_2. Antag att bågen $B \in M_2$. Om $B \cap B_1$ innehåller A_1 så är vi klara. Annars måste $B \cap B_1$ innehålla punkter på halvcirkeln C' och eftersom $B_1 < 180°$ kan B_1 inte innehålla punkten A_2, dvs bågen B måste innehålla denna punkt. Därmed är påståendet visat.

Problem 5. Anna och Bengt spelar ett spel där man lägger dominobrickor (av storlek 2×1) på bräden som består av $n \times 1$ rutor. Brickorna måste placeras så att de täcker exakt två rutor. Spelarna turas om att lägga var sin bricka och den som lägger den sista brickan vinner. De spelar en gång för varje n, där $n = 2, 3, \ldots, 2007$. Visa att Anna vinner minst 1505 av gångerna om hon alltid börjar och båda spelar optimalt, dvs om de i varje drag gör sitt bästa för att vinna.

Lösning. Om n är jämnt kan Anna alltid se till att hon vinner. Hon börjar lämpligen med att placera sin första bricka i mitten, dvs så att de täcker rutorna $\frac{n}{2}$ och $\frac{n}{2}+1$. Brädet delas då i två lika delar, vardera med $\frac{n}{2}-1$ rutor. För varje drag som Bengt gör genom att lägga sin bricka över två rutor på den ena hälften av brädet, kan Anna alltid kopiera draget på den andra hälften och där placera sin bricka över motsvarande rutor. När Bengt har gjort sitt sista möjliga drag, har Anna sin kopieringsmöjlighet kvar och kan lägga den sista brickan.

Om n är udda kan Bengt i vissa fall ordna en vinst. Om $n = 3$ vinner alltid Anna, eftersom bara en bricka kan läggas ut, men om $n = 5$ vinner Bengt. Det spelar nämligen ingen roll var Anna placerar sin första bricka; det kommer sedan alltid att finnas två intilliggande rutor över vilka Bengt kan placera nästa bricka och avsluta spelet. På ett bräde för vilket $n = n_0$ är udda och där Bengt vinner om de båda spelar på bästa sätt, kan Anna alltid ordna en vinst på brädet med $n = n_0 + 2$ rutor. Om Anna placerar sin första bricka över rutorna 1 och 2, återstår ett reducerat bräde med n_0 rutor på vilket Bengt sätter sin första bricka och således förlorar om båda spelar optimalt.

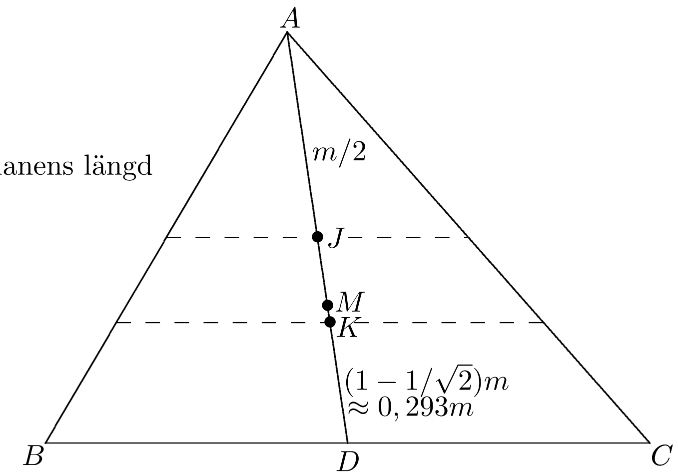
Sammanfattningsvis noterar vi att Anna alltid vinner om hon spelar på ett bräde där n är ett jämnt tal. Det finns $2006/2 = 1003$ sådana bräden. Antag att Bengt vinner på brädena som svarar mot de udda talen $n_1, n_2, \ldots, n_m$. Här måste det alltså gälla att $n_{i+1} - n_i \geq 4$. Bengt kan alltså på sin höjd vinna vartannat av spelen på bräden för vilka n är udda. Eftersom det totalt är 1003 bräden svarande mot udda n-värden, dvs 1002 bräden räknat från $n = 5$, kan Bengt i bästa fall vinna 501 av dem, vilket betyder att Anna vinner åtminstone de 501 övriga. Vi har redan konstaterat att Anna vinner när $n = 3$. Hon vinner alltså för samtliga 1003 jämna n-värden och för minst $1 + 501 = 502$ udda n-värden vilket totalt ger minst 1505 n-värden.

Problem 6. I planet är en triangel given. Bestäm alla punkter P i planet sådana att varje linje genom P som delar triangeln i två delar med samma area måste gå genom ett av triangelns hörn.

Lösning. Varje linje som går genom något av triangelhörnen och delar triangelarean i två lika delar, måste passera genom mittpunkten av den sida som står mot hörnet. Det räcker följaktligen att studera punkter P som ligger på någon av medianerna eller deras förlängningar. De tre medianerna passerar genom en och samma punkt M. Den delar varje median i förhållandet 2:1 från hörnet räknat. Det betyder att P antingen sammanfaller med M och ligger på alla tre medianerna eller ligger på exakt en av medianerna.

Betrakta medianen AD, på vilken punkterna J, M och K är markerade: J är mittpunkten på AD, M är skärningspunkten mellan de tre medianerna, dvs $\frac{|AM|}{|AD|} = \frac{2}{3}$, medan $\frac{|AK|}{|AD|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (se figur 1). Det sistnämnda sambandet innebär att en linje genom K och som är parallell med sidan BC delar triangelarean mitt itu.

m = medianens längd



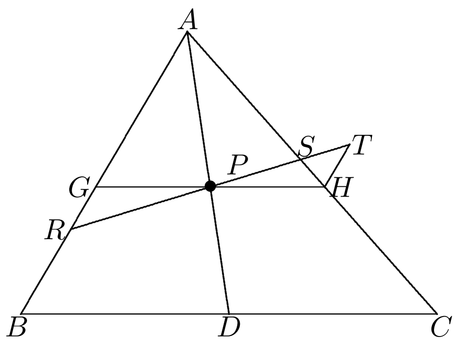
Figur 1

För punkter P på medianen AD eller dess förlängning gäller det att avgöra om det finns någon linje som passerar genom P och delar triangelarean mitt itu, men som inte passerar genom något av hörnen.

Vi ska visa att en sådan linje existerar för alla P mellan J och K, utom för M och den första ändpunkten, J. För den andra ändpunkten, K, existerar dock en sådan linje. Linjer som passerar punkterna J, M och de punkter som inte tillhör sträckan JK måste följaktligen passera något av triangelns hörn för att arean ska kunna halveras.

(0) Vi kommer att få användning av följande resultat. Låt P vara en godtycklig punkt på medianen AD och som inte sammanfaller med någon av ändpunkterna. Drag sträckan GH genom P, med G på AB och H på AC, parallell med sidan BC. Drag sträckan RS genom P, med $R \neq G$ på AB och $S \neq H$ på AC (se figur 2). Vi ska visa att triangeln ARS har större area än triangeln AGH. Det räcker att behandla fallet när R ligger mellan G och B

Låt oss förlänga sträckan RS över S till punkten T, så att sträckan TH är parallell med sträckan GR. Trianglarna RPG och TPH blir då kongruenta, eftersom sträckan GH delas mitt itu av medianen AD och vinklarna är parvis lika. Vi observerar att $\angle SHT = \angle BAC$. Eftersom triangeln TPH innesluter triangeln SPH och trianglarna inte kan vara identiska, är area($\triangle RPG$) = area($\triangle TPH$) > area($\triangle SPH$), varav följer att area($\triangle ARS$) > area($\triangle AGH$).

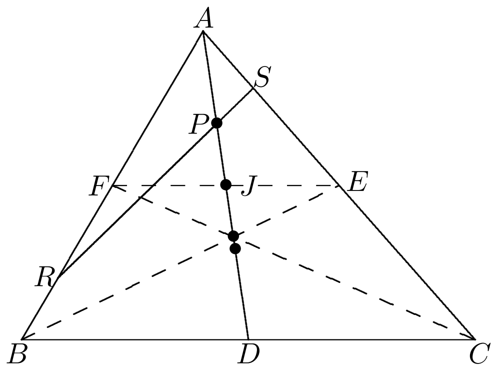


Figur 2

Låt oss nu betrakta de olika fallen av lägen för punkten P.

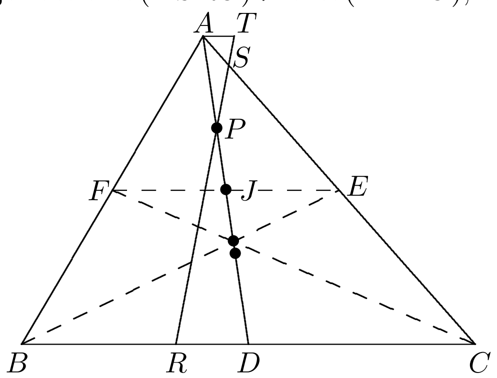
1) Om P sammanfaller med A eller D, alternativt ligger på förlängningen av medianen AD, är det endast linjen som innehåller medianen AD som delar arean mitt itu. När vi vrider linjen kring P ändras förhållandet mellan triangeldelarnas areor monotont.

2) Antag att P ligger mellan A och J, med A exkluderad och J inkluderad. Drag RS genom P med R på AB och S på AC (se figur 3). Triangeln ARS kommer då att inneslutas i någon av trianglarna ABE och ACF, men kan inte sammanfalla med någon av dem, varför arean måste vara mindre än $\frac{1}{2}$.



Figur 3

Antag att R i stället ligger på BC. Det räcker att studera fallet när R ligger mellan B och D. Punkten S kommer då att ligga på AC, mellan A och E (se figur 4). Låt oss förlänga sträckan RS över S till punkten T, så att sträckan AT är parallell med sträckan RD. Trianglarna DPR och APT blir då likformiga, eftersom vinklarna är parvis lika. Vi observerar att $\angle TAS = \angle ACB$. Eftersom sträckan PD är lika lång som eller längre än sträckan AP, är area$(\triangle DPR) \geq$ area$(\triangle APT) >$ area$(\triangle APS)$, varav följer att area$(\triangle SRC) >$ area$(\triangle ADC)$, dvs är $> \frac{1}{2}$.

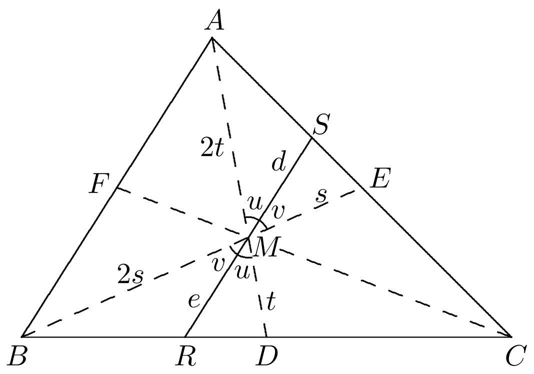


Figur 4

3) Vi betraktar nu fallet $P = M$ (se figur 5). Om P ligger i medianernas skärningspunkt, måste varje linje som delar triangelarean mitt itu passera genom något av triangelhörnen. Antag motsatsen, dvs att det existerar en linje som delar triangelarean i två lika delar, men inte passerar något av hörnen. Det räcker att studera fallet när linjen genom P skär sidan BC i en punkt R mellan B och D och således sidan AC i en punkt S mellan A och E. För att sträckan RS ska dela arean av triangeln ABC mitt itu, måste trianglarna AMS och RMD ha samma area, eftersom median AD halverar arean. Av motsvarande skäl måste trianglarna BMR och SME ha samma area. Detta leder till sambanden (vertikalvinklar u och v enligt figuren)

$$\frac{1}{2}2td\sin u = \frac{1}{2}et\sin u \quad \text{och}$$
$$\frac{1}{2}2se\sin v = \frac{1}{2}ds\sin v,$$

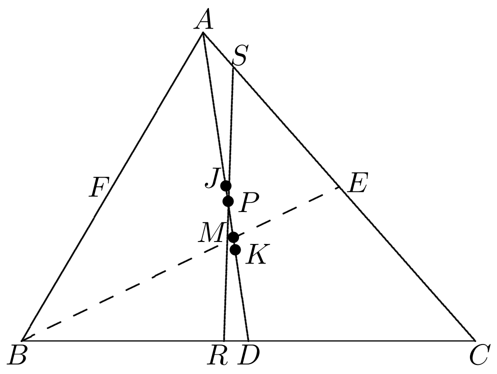
dvs om vinklarna u och v båda är skilda från 0 har vi $e = 2d$ och $2e = d$: motsägelse. Sträckan RS kan följaktligen inte dela triangelarean mitt itu. Varje linje genom M delar upp triangeln ABC i två delar, en deltriangel och en fyrhörning, där deltriangelns area alltid är mindre än fyrhörningens area, utom i de tre fall när linjen innehåller en median till triangeln ABC. Antag att det finns en deltriangel med area $> \frac{1}{2}$. Antag att denna deltriangel innehåller hörnet C. Men den deltriangel som avskärs av en linje genom M parallell med AB har arean $(\frac{2}{3})^2 = \frac{4}{9} < \frac{1}{2}$. Av kontinuitetsskäl finns det då en linje genom M vilken skär av en triangel som innehåller C och som delar arean mitt itu: motsägelse.



Figur 5

4) Antag nu att P ligger mellan K och D (se figur 1). Vi vet att den linje genom K som är parallell med sidan BC delar triangelarean mitt itu, så låt oss anta att $P \neq K$. Varje linje genom P som skär AB i en punkt R och sidan AC i en punkt S avskär en deltriangel, vars area är minimal om RS är parallell med BC enligt resultat 0) (se figur 2). Men "parallelltriangeln" har en area som är $> \frac{1}{2}$, dvs arean av varje deltriangel ARS är därför $> \frac{1}{2}$.
Om R i stället ligger på sidan BC och S på någon av de andra sidorna, kommer sträckan RS att avskära en deltriangel som innehåller något av hörnen B och C. Ingen sådan triangel kommer att innehålla punkten M. Enligt 3) måste arean för varje sådan deltriangel vara $< \frac{1}{2}$. Endast linjen som innehåller AD kan därför halvera arean.

5) Antag nu att P ligger mellan J och M (se figur 6). Betrakta sträckan RS genom P, där R är en punkt på BC och S en punkt på AC. Låt vinkeln mellan medianen AD och sträckan RS vara u. Vi vet att AP är längre än PD. Genom att göra vinkeln u tillräckligt liten kan vi se till att också SP är längre än PR. Arean av triangeln RPD är då lika med $\frac{1}{2}|RP| \cdot |PD| \cdot \sin u$, vilket är mindre än $\frac{1}{2}|AP| \cdot |PS| \cdot \sin u$, dvs mindre än arean av triangeln APS. Det innebär i sin tur att triangeln SRC har mindre area än triangeln ADC, dvs är $< \frac{1}{2}$. Om vi nu flyttar R längs DR tills R sammanfaller med hörnet B och samtidigt flyttar S på sidan AC så att RS passerar genom P kommer den så avskurna triangeln att innehålla triangeln EBC, vilket betyder att den nu avskurna triangeln har en area som är $> \frac{1}{2}$, varför det av kontinuitetsskäl måste finnas ett mellanliggande läge för vilket arean halveras.



Figur 6

6) Om slutligen P ligger mellan M och K kan vi använda ett kontinuitetsresonemang liknande det i 5) (läget för punkten P i figur 6 blir alltså nedanför M). Om sträckan genom P, med ändpunkter R och S, är parallell med sidan BC, är arean av triangeln ARS mindre än $\frac{1}{2}$. Om vi därefter flyttar R längs AB tills R sammanfaller med B och S sålunda rör sig längs AC, kommer triangeln ARS att innehålla triangeln ABE och vi finner att triangeln ARS i sitt nya läge har en area som är $> \frac{1}{2}$. Följaktligen måste det finnas ett mellanliggande läge för vilket triangelarean halveras.