SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Finaltävling i Luleå den 25 november 2006

1. Antag att de positiva heltalen a och b har 99 respektive 101 olika positiva delare (1 och talet självt inräknade). Kan produkten ab ha 150 olika positiva delare?

2. I triangeln ABC skär bisektriserna varandra i punkten P. Låt A', B' och C' vara de vinkelräta projektionerna av P på sidorna BC, AC och AB respektive. Visa att vinkeln $B'A'C'$ är spetsig.

3. Ett tredjegradspolynom f har tre olika reella nollställen a, b och c. Koefficienten för x^3 är positiv. Visa att
$$f'(a) + f'(b) + f'(c) > 0.$$

4. Saskia och hennes systrar har fått ett stort antal pärlor som gåva. Pärlorna är vita, svarta och röda i varierande antal. De vita är värda 5 dukater, de svarta 7 dukater och de röda 12 dukater stycket. Totala värdet av pärlorna är 2107 dukater. Saskia och hennes systrar delar upp pärlorna så att alla får lika många och till samma värde, men färgfördelningen varierar mellan andelarna. Intressant nog är värdet av varje andel, uttryckt i antalet dukater, lika med antalet pärlor som systrarna totalt ska dela på. Saskia är speciellt förtjust i de röda pärlorna och ser till att hennes andel innehåller maximalt antal av dessa. Hur många vita, svarta och röda pärlor får Saskia?

5. En rektangel delas in i m gånger n rutor. I varje ruta sätter man ett kryss eller en ring. Låt $f(m, n)$ vara antalet sådana arrangemang som innehåller en rad eller kolumn med enbart ringar. Låt $g(m, n)$ vara antalet arrangemang som innehåller antingen en rad med enbart ringar eller en kolumn med enbart kryss. Vilket tal är störst, $f(m, n)$ eller $g(m, n)$?

6. Bestäm alla positiva heltal a, b, c sådana att
$$a^{(b^c)} = (b^a)^c.$$

Skrivtid: 5 timmar
Miniräknare är *inte* tillåtna!