SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Finaltävling i Uppsala den 24 november 2007

1. Lös ekvationssystemet
$$\begin{cases} xyzu - x^3 = 9 \\ x + yz = \frac{3}{2}u \end{cases}$$
i positiva heltal x, y, z och u.

2. Ett antal blommor fördelas mellan n personer så att den förste av dem, Andreas, får en blomma, den andre får två blommor, den tredje får tre blommor osv, till person nr n som får n blommor. Andreas går sedan runt och skakar hand en gång med var och en av de övriga, i godtycklig ordning. Därvid får han en blomma från var och en som han hälsar på och som har fler blommor än han själv i det ögonblick de skakar hand. Vilket är det minsta antalet blommor som Andreas kan ha när han har skakat hand med alla?

3. Låt α, β, γ vara vinklarna i en triangel. Om a, b, c är triangelns sidlängder och R är den omskrivna cirkelns radie, visa att
$$\cot\,\alpha + \cot\,\beta + \cot\,\gamma = \frac{R(a^2 + b^2 + c^2)}{abc}.$$
Anm. $\cot\,x = \frac{\cos\,x}{\sin\,x}$.

4. På randen till en cirkelskiva finns ett antal bågar. Varje par av bågar har minst en punkt gemensam. Visa att man på cirkeln kan välja två diametralt motstående punkter sådana att varje båge innehåller minst en av dessa två punkter.

5. Anna och Bengt spelar ett spel där man lägger dominobrickor (av storlek 2×1) på bräden som består av $n \times 1$ rutor. Brickorna måste placeras så att de täcker exakt två rutor. Spelarna turas om att lägga var sin bricka och den som lägger den sista brickan vinner. De spelar en gång för varje n, där $n = 2, 3, \ldots, 2007$. Visa att Anna vinner minst 1505 av gångerna om hon alltid börjar och båda spelar optimalt, dvs om de i varje drag gör sitt bästa för att vinna.

6. I planet är en triangel given. Bestäm alla punkter P i planet sådana att varje linje genom P som delar triangeln i två delar med samma area måste gå genom ett av triangelns hörn.

Skrivtid: 5 timmar
Miniräknare är *inte* tillåtna!