SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Stockholm den 23 november 2013

1. För $r > 0$, beteckna med B_r mängden av punkter som ligger högst r längdenheter från origo. Om P_r är mängden av de punkter i B_r som har heltalskoordinater, visa att ekvationen

$$xy^3z + 2x^3z^3 - 3x^5y = 0$$

har ett udda antal lösningar (x, y, z) i P_r.

Lösning. Beteckna $f(x, y, z) = xy^3z + 2x^3z^3 - 3x^5y$. Trippeln $(0, 0, 0)$ är en lösning, eftersom $f(0, 0, 0) = 0$. Det är uppenbart att $f(-x, y, z) = -f(x, y, z)$. Det medför att (x_0, y_0, z_0) är en lösning till ekvationen om och endast om $(-x_0, y_0, z_0)$ är en lösning. Notera också att mängden P_r är symmetrisk med avseende på yz-planet, det vill säga att (x, y, z) ligger i P_r om och endast om $(-x, y, z)$ ligger i P_r. Antalet lösningar (x, y, z) i P_r, för vilka $x \neq 0$, är därmed jämnt. Det återstår att visa att antalet lösningar i P_r som har formen $(0, y, z) \neq (0, 0, 0)$ också är jämnt. Insättning visar att alla punkter med koordinater $(0, y, z)$ representerar lösningar. Antalet sådana punkter, skilda från origo, är jämnt, eftersom $(0, y, z)$ ligger i P_r om och endast om $(0, -y, -z)$ ligger i P_r, och $(0, y, z) \neq (0 - y, -z)$ för $(0, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Det totala antalet lösningar till ekvationen i P_r är alltså udda.

2. Pappersvikningskonsten *origami* utförs oftast med kvadratiska pappersark. Man viker arket en gång utefter en linje genom arkets centrum så att man får en niohörning. Låt p vara niohörningens omkrets minus längden av vecket, d.v.s. den sammanlagda längden av de åtta sidor som inte är veck, och beteckna med s den ursprungliga kvadratens sidlängd. Uttryck arean av niohörningen med hjälp av p och s.

Lösning I. Spegla niohörningen i den räta linje som innehåller vecket. Figuren som bildas kan ses som två kvadrater med sidlängd s, av vilka den ena är bilden av den andra vid rotation en viss vinkel kring diagonalernas skärningspunkt O. Vinkeln kan utan inskränkning väljas spetsig. De delar av kvadraterna som inte överlappar är åtta rätvinkliga trianglar belägna vid de två kvadraternas hörn. Vi ska visa att de är kongruenta. Alla åtta har en spetsig vinkel lika med rotationsvinkeln, så de är likformiga. Att de fyra som är belägna vid en kvadrats hörn är kongruenta följer av att de är varandras bilder vid rotation $k \cdot 90^\circ$, k heltal, kring O. Beteckna längden av de rätvinkliga trianglarnas kateter med a_i och b_i, och längden av deras hypotenusor med c_i, $i = 1, 2$, där indexen 1 och 2 markerar vilken kvadrat det handlar om. Att alla åtta trianglarna är kongruenta följer nu av att $a_1 + b_1 + c_2 = a_2 + b_2 + c_1 = s$, vilket endast är möjligt för $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} = 1$. Därmed har vi $s = a + b + c$, och $p = 4\,(a + b)$, så att $4c = 4s - p$. Pythagoras sats ger att $c^2 = a^2 + b^2$.

Arean av niohörningen är hälften av arean av överlappet mellan de två kvadraterna plus fyra gånger arean av en av de rätvinkliga trianglarna, det vill säga

$$A = \frac{1}{2}\left(s^2 - 4 \cdot \frac{ab}{2}\right) + 4 \cdot \frac{ab}{2} = \frac{s^2}{2} + ab,$$

och det som återstår är att uttrycka ab i termer av s och p. Vi har $p^2 = 16(a^2 + b^2 + 2ab) = 16(c^2 + 2ab)$, så att $16c^2 = (4s - p)^2 = p^2 - 32ab$, och vi får

$$ab = \frac{ps}{4} - \frac{s^2}{2}.$$

Insatt i formeln för niohörningens area ger detta

$$A = \frac{s^2}{2} + ab = \frac{ps}{4}.$$

Lösning II. Dra sträckorna från O till niohörningens alla hörn. I de åtta trianglarna som bildas kan vi välja en av niohörningens sidor som inte är vecket som bas. Höjden mot den basen är hälften av en av kvadraternas sidor och niohörningens area blir $\frac{1}{2} \cdot \frac{s}{2} \cdot p = \frac{ps}{4}$.

3. Bestäm alla primtal p samt alla icke-negativa heltal m och n, sådana att

$$1 + p^n = m^3.$$

Lösning. Notera först att n måste vara ett positivt tal. Faktorisering ger

$$p^n = (m-1)(m^2 + m + 1),$$

vilket medför att $m > 1$. Vi har dessutom $m^2 + m + 1 > m + 1 > m - 1$. Eftersom p är ett primtal måste en av följande möjligheter gälla

(i) $m - 1 = 1$;

(ii) $p \mid m - 1$ och $p \mid m^2 + m + 1$.

Fall (i): Vi har $m = 2$, och $p^n = 7$. Detta fall leder till lösningen $p = 7,\ m = 2,\ n = 1$.

Fall (ii): Om $p \mid m - 1$ och $p \mid m^2 + m + 1$, så gäller $p \mid m^2 + m + 1 - (m-1)^2 = 3m$. Eftersom $p \mid m - 1$ kan p inte dela m, vilket betyder att $p = 3$. Det ger att $m = 3^k + 1$, $m^2 + m + 1 = 3^l$, där k, l är positiva heltal. Observationen att $m^2 + m + 1 > m - 1$ ger att $l > k$. Vi får

$$3^l = (3^k + 1)^2 + (3^k + 1) + 1 = 3^{2k} + 3^{k+1} + 3,$$

vilket endast är möjligt för $l = 1$. Detta är dock en motsägelse med att $l > k > 0$. I fall *(ii)* finns alltså inga lösningar till ekvationen.

Därmed är den enda lösningen $p = 7,\ m = 2,\ n = 1$.

4. En robotgräsklippare är placerad i mitten av en stor gräsmatta. På grund av ett fabrikationsfel kan roboten endast röra sig rakt fram och svänga i riktningar som är multiplar av $60°$. Ett staket ska sättas upp så att det avgränsar hela den del av gräsmattan som roboten kan ta sig till genom att färdas längs en kurva med längd högst 10 meter från sitt utgångsläge, givet att den är vänd mot norr när den startar. Hur långt måste staketet vara?

Lösning. Vi ska visa att roboten kan ta sig till alla punkter i en (sluten) regelbunden sexhörning med sidan 10 meter. Staketets längd måste då vara 60 meter.

Betrakta den regelbundna sexhörningen med sidan 10 meter som har robotens utgångsläge O som symmetricentrum och som har ett hörn rakt norrut från O. Vi behöver visa två saker, dels att alla punkter i den (slutna) sexhörningen kan nås av roboten, dels att ingen av punkterna utanför är nåbara.

Det är uppenbart att roboten kan nå alla hörn genom att först svänga $k \cdot 60°$, $k = 0, 1, \ldots, 5$, och sedan färdas en 10 meter lång rak sträcka. Välj en godtycklig punkt P på en av sexhörningens sidor, säg AB. Låt roboten färdas längs OA fram till punkten Q på OA, som är sådan att $QA = AP$. Låt därefter roboten svänga $60°$ mot P. Triangeln AQP är liksidig, eftersom den är likbent och har en vinkel $60°$, och vi får att robotens väg från O till P är $OQ + QP = OQ + QA = OA = AB = 10$ m. För att inse att roboten kan nå en godtycklig punkt P' inne i triangeln ABO, drag en linje parallell med OB genom P' och beteckna med P dess skärningspunkt med AB. Punkten P' kommer då att ligga på sträckan QP, där Q är samma punkt som tidigare, och roboten kommer alltså att passera P' på sin väg mot P.

Det återstår att visa att roboten inte kan nå någon punkt utanför den slutna sexhörningen. Tag en punkt P'' utanför. Påståendet är uppenbart om P'' ligger på någon av strålarna från O genom de sex hörnen. Antag därför att P'' ligger inuti vinkeln AOB (A och B är som tidigare två intilliggande hörn). Dra en lnje parallell med AB genom P'', och beteckna med A'' respektive B'' dess skärningspunkter med strålarna OA respektive OB. Punkten P'' kommer då att ligga på sidan $A''B''$ i en regelbunden sexhörning med sidlängd $A''B'' > AB$. Vi ska visa att robotens väg till P'' är minst $OA'' = A''B''$, oavsett antalet svängningar på vägen. Den kortaste vägen måste vara bland dem vars alla sträckor är parallella med OA eller OB, eftersom det är de enda riktningarna som gör att man närmar sig sidan AB. Med samma resonemang om liksidiga trianglar som tidigare inser vi att summan av de två sista sträcklängderna fram till P'' är lika med längden av en sträcka från den nästsista svängningspunkten till en annan punkt på $A''B''$. Vi kan alltså successivt ersätta sträckorna på vägen med sträckor som alla är parallella med enbart OA'' eller enbart OB'' och som ger lika lång total väg. Resultatet när vi backat ända till O blir sträckan OA'' eller sträckan OB'', som båda är lika långa som $A''B'' > AB = 10$ meter, vilket bevisar påståendet.

5. Låt $n \geq 2$ vara ett positivt heltal. Visa att det finns exakt $2^{n-3}n(n-1)$ n-tupler av heltal $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, som uppfyller villkoren

(i) $a_1 = 0$;

(ii) för varje m, $2 \leq m \leq n$, finns ett index i_m, $1 \leq i_m < m$, sådant att $|a_{i_m} - a_m| \leq 1$;

(iii) n-tupeln $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ innehåller exakt $n - 1$ olika tal.

Lösning. Eftersom mängden $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ består av $n-1$ olika tal, kommer vi att ha $|a_{i_m} - a_m| = 0$, det vill säga $a_{i_m} = a_m$, för exakt ett index m. För alla index $j > 1,\ j \neq m$, måste alltså gälla (visas induktivt)

$$a_j = \max\{a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}\} + 1, \qquad \text{eller} \qquad a_j = \min\{a_1, a_2, \ldots, a_{j-1}\} - 1.$$

För att räkna antalet n-tupler som uppfyller villkoren måste vi räkna antalet n-tupler som bildas genom att man successivt gör följande val (som entydigt bestämmer en n-tupel med de önskade egenskaperna):

(i) Välj index m bland talen $2, 3, \ldots, n$.

(ii) Välj index i_m bland talen $1, 2, \ldots, m-1$. För fixt m kan detta göras på $m-1$ olika sätt.

(iii) För alla $j > 1,\ j \neq m$, välj en av möjligheterna beskrivna ovan. Eftersom antalet index $j > 1,\ j \neq m$, är $n-2$, och det finns två val för varje, kan hela n-tupeln för fixt m och fixt i_m väljas på 2^{n-2} olika sätt.

Antalet n-tupler med de önskade egenskaperna är alltså

$$\sum_{m=2}^{n} (m-1) \cdot 2^{n-2} = 2^{n-2}(1 + 2 + \cdots + (n-1)) = 2^{n-2} \cdot \frac{n(n-1)}{2} = 2^{n-3} n(n-1).$$

6. Låt a, b, c vara reella tal sådana att

$$a^2b^2 + 18abc > 4b^3 + 4a^3c + 27c^2.$$

Visa att $a^2 > 3b$.

Lösning. Villkoret betyder att c är en reell lösning till andragradsolikheten

$$f_{a,b}(x) = 27x^2 + 2\,(2a^3 - 9ab)\,x + (4b^3 - a^2b^2) < 0.$$

Koefficienten för x^2 i $f_{a,b}(x)$ är positiv, vilket innebär att olikheten $f_{a,b}(x) < 0$ har reella lösningar om och endast om $f_{a,b}(x)$ har två olika reella nollställen, det vill säga om och endast om

$$(2a^3 - 9ab)^2 - 27(4b^3 - a^2b^2) > 0.$$

Omskrivning av vänsterledet ger nu

$$\begin{aligned}
(2a^3 - 9ab)^2 - 27(4b^3 - a^2b^2) &= 4a^6 - 36a^4b + 81a^2b^2 - 108b^3 + 27a^2b^2 = \\
&= 4a^4(a^2 - 3b) - 24a^4b + 108a^2b^2 - 108b^3 = \\
&= 4a^4(a^2 - 3b) + 108b^2(a^2 - 3b) + 216b^3 - 24a^4b = \\
&= (a^2 - 3b)(4a^4 + 108b^2) - 24b\,(a^4 - 9b^2) = \\
&= (a^2 - 3b)(4a^4 + 108b^2 - 24a^2b - 72b^2) = \\
&= 4\,(a^2 - 3b)(a^4 + 9b^2 - 6a^2b) = \\
&= 4\,(a^2 - 3b)^3 > 0,
\end{aligned}$$

vilket är ekvivalent med $a^2 > 3b$.