SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Linköping den 21 november 2015

1. Givet är den spetsiga triangeln ABC. En diameter till triangelns omskrivna cirkel skär triangelns sidor AC och BC, och delar därvid sidan BC mitt itu. Visa att samma diameter delar sidan AC i förhållande $1:3$, räknat från A, om och endast om $\tan B = 2\tan C$.

2. Bestäm alla heltalslösningar till ekvationen $x^3 + y^3 + 2015 = 0$.

3. Låt a, b, c vara positiva reella tal. Bestäm det minsta värde som kan antas av följande uttryck

$$\frac{a^2 + 2b^2 + 4c^2}{b(a + 2c)}.$$

4. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x\ln x + y\ln y + z\ln z = 0, \\ \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln y}{y} + \dfrac{\ln z}{z} = 0. \end{cases}$$

5. Givet är ett ändligt antal olika punkter i planet samt lika många olika strålar som börjar i origo. Går det alltid att para ihop punkterna med strålarna så att de parallellförflyttade strålarna med början i respektive punkter inte skär varandra?

6. Axel och Berta spelar följande spel: På en tavla står ett antal positiva heltal. Ett drag består i att en spelare byter ut ett tal x på tavlan mot två positiva heltal y och z (inte nödvändigtvis olika), sådana att $y + z = x$. Spelet avslutas då talen på tavlan är parvis relativt prima. Den spelare som gjort det sista draget har då förlorat spelet. I början av spelet står endast talet 2015 på tavlan. Spelarna gör vartannat drag och Berta börjar. En av spelarna har en vinnande strategi. Vem, och varför?

Skrivtid: 5 timmar
Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!