SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling den 21 november 2020

1. Hur många av talen $1 \cdot 2 \cdot 3,\ \ 2 \cdot 3 \cdot 4,\ \ \ldots,\ \ 2020 \cdot 2021 \cdot 2022$ är delbara med 2020?

2. Medianerna till sidorna AC och BC i triangeln ABC är rätvinkliga mot varandra. Visa att
$$\frac{1}{2} < \frac{|AC|}{|BC|} < 2.$$

3. Bestäm alla begränsade funktioner
$$f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
som uppfyller
$$f(f(x) + y) = f(x) + f(y),$$
för alla reella x, y.

4. Vilket är det minsta positiva heltalet n för vilket det går att hitta en (icke-degenererad) n-hörning med sidlängder 1, 2, …, n, och där alla hörn har heltalskoordinater?

5. Finn alla heltal a sådana att det finns något primtal $p \geq 5$ som delar
$$\binom{p-1}{2} + \binom{p-1}{3}a + \binom{p-1}{4}a^2 + \cdots + \binom{p-1}{p-3}a^{p-5}.$$

6. En ändlig mängd av axelparallella kuber i rummet har egenskapen att varje punkt i rummet ligger i högst M olika kuber. Visa att man kan dela upp mängden av kuber i $8(M-1)+1$ delmängder (eller färre) med egenskapen att kuberna i varje delmängd saknar gemensamma punkter. (En axelparallell kub är en kub vars kanter är parallella med koordinataxlarna.)

Skrivtid: 5 timmar
Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!