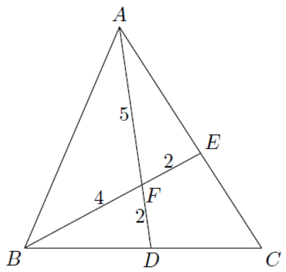
SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Lund den 18 november 2023

1. Anna och Lisa gör en cykeltur. Annas cykel går sönder 30 kilometer före deras slutmål. De två bestämmer sig för att slutföra turen med Lisas cykel på följande sätt: I början cyklar Anna och Lisa går. Vid någon tidpunkt kliver Anna av cykeln, parkerar den vid vägen och fortsätter till fots. När Lisa kommer fram till cykeln tar hon den och cyklar tills hon kommer ifatt Anna. Efter det upprepar de samma procedur.

Vi vet inte hur många gånger proceduren upprepas, men de kommer fram till slutmålet samtidigt. Anna går med farten 4 km/h och cyklar med farten 15 km/h. Lisa går med 5 km/h och cyklar med 20 km/h. Hur lång tid tar det för dem att ta sig över de sista 30 km av vägen? (Försumma tiden det tar att parkera, låsa, låsa upp cykeln, etc.)

2. Ett triangulärt koloniområde är indelat i fyra fält av varierande storlek som figuren nedan visar. Det enda vi för övrigt vet är att sträckorna AF, FD, BF och FE har längderna 5, 2, 4 respektive 2 (i 10-tals m). När lotterna fördelas får Joar välja först. Vilken lott ska han välja för att få den med störst area?



3. Låt n vara ett positivt heltal och låt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vara olika reella tal, placerade efter varandra i någon ordning. Vi säger att vi har ett *lokalt minimum* i ett av talen om detta är mindre än båda sina grannar.

Vilket är det genomsnittliga antalet lokala minima över alla möjliga sätt att ordna talen efter varandra?

4. Låt f vara en funktion som till varje par av positiva heltal (x, y) kopplar ett positivt heltal $f(x, y)$. Antag att $f(x, y) \leq xy$ för alla positiva heltal x, y. Visa att det finns 2023 olika par $(x_1, y_1), \ldots (x_{2023}, y_{2023})$ sådana att

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = \cdots = f(x_{2023}, y_{2023}).$$

5.(a) Låt x och y vara heltal. Visa att $x = y$ om $x^n \equiv y^n \bmod n$ för alla positiva heltal n.

(b) För vilka par av heltal (x, y) finns det oändligt många positiva heltal n sådana att $x^n \equiv y^n \bmod n$?

6. Visa att varje rationellt tal x i intervallet $(0, 1)$ kan skrivas som en ändlig summa av olika bråk av typen $\dfrac{1}{k(k+1)}$, det vill säga olika element i följden $\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{6}, \dfrac{1}{12}, \ldots$.

Skrivtid: 5 timmar
Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!