SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling den 19 november 2011

Förslag till lösningar

1. Bestäm alla positiva heltal k, l, m och n, sådana att

$$\frac{1}{k!} + \frac{1}{l!} + \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!}\,.$$

Lösning: Vi kan utan inskränkning anta att $k \geq l \geq m$. Då följer att $n < m$, samt att

$$\frac{1}{n!} = \frac{1}{k!} + \frac{1}{l!} + \frac{1}{m!} \leq \frac{3}{m!}\,,$$

och därmed att $m! \leq 3n!$. Det betyder att $(n+1)(n+2)\cdots m \leq 3$, vilket endast är uppfyllt för $m = n+1 = 2$, eller $m = n+1 = 3$. Vi kan nu reducera antalet obekanta i den givna ekvationen till två.

I det första fallet får vi $n = 1,\ m = 2,\ k, l \geq 2$, och

$$\frac{1}{k!} + \frac{1}{l!} = \frac{1}{2} \leq \frac{2}{l!},$$

så att $l! \leq 4$, och $l \leq 2$, vilket ger $l = m = 2,\ n = 1$, och

$$\frac{1}{k!} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$

en omöjlighet.

I det andra fallet får vi $n = 2,\ m = 3$, och

$$\frac{1}{k!} + \frac{1}{l!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

Nu följer att

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{k!} + \frac{1}{l!} \leq \frac{2}{l!},$$

och därmed att $l! \leq 6$. De heltal l för vilka detta gäller är $l = 2$ och $l = 3$. För $l = 2$ får vi

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} < 0,$$

vilket är omöjligt. För $l = 3$ fås

$$\frac{1}{k!} = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6},$$

d.v.s. $k = 3$. Den enda lösningen (i mängden av alla positiva heltal) är alltså $k = l = m = 3,\ n = 2$.

2. Givet en triangel ABC, låt P vara en punkt innanför triangeln sådan att $|BP| > |AP|,\ |BP| > |CP|$. Visa att $\angle ABC < 90°$.

Lösning: I en triangel är vinkeln stående mot en större sida större än vinkeln stående mot en mindre sida. Eftersom $|BP| > |AP|$ kan vi därför dra slutsatsen att $\angle ABP < \angle BAP < \angle BAC$, och eftersom $|BP| > |CP|$ gäller också att $\angle CBP < \angle BCP < \angle BCA$. Vi får att $\angle ABC = \angle ABP + \angle CBP < \angle BAC + \angle BCA = 180° - \angle ABC$, så att $\angle ABC < 90°$.

3. Finn alla positiva reella tal x, y, z, sådana att

$$x - \frac{1}{y^2} = y - \frac{1}{z^2} = z - \frac{1}{x^2}\,.$$

Lösning: Vi kan utan inskränkning anta att $x \le y,\ x \le z$. Likheten $x - \frac{1}{y^2} = y - \frac{1}{z^2}$ kan skrivas som

$$x - y = \frac{1}{y^2} - \frac{1}{z^2} = \frac{z^2 - y^2}{y^2 z^2}\,,$$

och likheten $y - \frac{1}{z^2} = z - \frac{1}{x^2}$ kan skrivas som

$$y - z = \frac{1}{z^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - z^2}{x^2 z^2}\,.$$

Eftersom $x \le y$, och talen är positiva, får vi ur den första likheten att $z \le y$. Då har vi att $y - z \ge 0$, så att den andra likheten ger $x \ge z$, vilket betyder att $x = z$. Det följer nu omedelbart att $y = z$, så att alla positiva lösningar till ekvationssystemet ges av $x = y = z = t$, där t är ett positivt (för övrigt godtyckligt) reellt tal.

4. Städerna A, B och C är förenade med ett telekabelnät. Om man exempelvis vill skicka ett meddelande från A till B tilldelas man antingen en direktlinje mellan A och B, eller, vid behov, en linje via C. Det finns 43 linjer mellan A och B, inklusive dem som går via C, och 29 linjer mellan B och C, inklusive dem som går via A. Hur många linjer kan det finnas mellan A och C (inklusive dem som går via B)?

Lösning: Beteckna med x antalet linjer mellan A och B som inte passerar C, med y antalet linjer mellan B och C som inte passerar A, samt med z antalet linjer mellan C och A som inte passerar B. Vi har då ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + yz &= 43, \\ y + xz &= 29. \end{cases}$$

Vi söker $z + xy$. Addition respektive subtraktion av de två ekvationerna ger

$$(y + x)(z + 1) = 72,$$

och

$$(y-x)(z-1)=14.$$

Vi söker de positiva z-värden för vilka $z-1$ är en delare till 14, samtidigt som $z+1$ är en delare till 72. Möjliga sådana z-värden är $2,3,8$. För $z=8$ får vi att ekvationssystemet har positiva heltalslösningar, $x=3,\ y=5$, vilket ger $z+xy=23$. För $z=3$ får ekvationssystemet $y+x=18,\ y-x=7$, vilket saknar heltalslösningar. Slutligen, för $z=2$ får vi $y+x=24,\ y-x=14$, vilket ger $y=19,\ x=5$, och $z+xy=97$.

Om $z=0$, d.v.s. om det inte finns direkta linjer mellan C och A, leder det till att det finns $43\cdot 29=1247$ (indirekta) förbindelser mellan A och C.

5. Arne och Bertil spelar ett spel på ett 11×11 stort rutbräde. Arne börjar. Han har en spelpjäs som i spelets början är placerad på mittrutan. I varje drag flyttar han pjäsen ett steg horisontellt eller vertikalt. Bertil placerar i varje drag ut en vägg längs någon av en valfri rutas fyra sidor. Arne får inte flytta sin pjäs genom en vägg. Arne vinner om han lyckas fly från brädet, medan Bertil vinner om han lyckas förhindra att Arne flyr. Vem vinner om det från början inte finns några väggar på spelplanen och båda spelarna spelar optimalt?

Lösning: Vi ska visa att Bertil kan stänga in Arne i en kvadrat med sidan 11, d.v.s. att Bertil har en vinnande strategi. Under de fyra första dragen kan Arne inte nå fram till randen av kvadraten, så han kan inte hinna ut ur 11×11-brädet i något av sina fem första drag oavsett hur Bertil spelar. I de fyra första dragen placerar Bertil ut en vägg vid varje hörn. Efter det finns det ingen ruta ur vilken Arne kan lämna brädet på mer än ett sätt. I alla efterföljande drag finns därför högst en vägg som Bertil måste sätta upp för att hindra Arne från att vinna. Bertil har alltså en vinnande strategi.

6. Hur många funktioner f finns det som är definierade i mängden av alla icke-negativa heltal, med värden i samma mängd, och sådana att de uppfyller $f(0)=2011,\ f(1)=111$, och

$$f(\max\{x+y+2, xy\}) = \min\{f(x+y), f(xy+2)\},$$

för alla icke-negativa heltal x, y?

Lösning: *(i)* Sätt $y=0$. Vi får att $f(\max\{x+2,0\}) = \min\{f(x), f(2)\} \le f(2)$, för alla $x\ge 3$. Ur detta följer att $f(x)\le f(2)$, för alla $x\ge 3$, och därmed att $f(x+2)=f(x)$, för alla $x\ge 3$. För $x=2$ får vi också $f(4)=\min\{f(2),f(2)\}=f(2)$.
(ii) Sätt $y=1$. Vi får nu att $f(x+3)=f(\max\{x+3,x\})=\min\{f(x+1),f(x+2)\}\le f(x+2)$, och ser att $f(2)\ge f(3)\ge f(4)\ge\ldots$. I kombination med *(i)* ger detta $f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=\cdots$.
Vi vet alltså att $f(3)=f(2)$. Då gäller $f(2)=f(3)=\min\{f(1),f(2)\}$, d.v.s. $f(1)\ge f(2)$, och vi får

$$111 \ge f(2)=f(3)=f(4)=f(5)=\cdots,$$

och vi får att $f(2)$ kan väljas på 112 olika sätt. Det återstår att visa att alla dessa sätt verkligen ger funktioner som uppfyller villkoren. Om $x > 1$ eller $y > 1$, så blir vänsterledet $= f(2) =$ högerledet, och man kontrollerar lätt de återstående fyra fallen $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$.

Totalt finns alltså 112 olika funktioner med de efterfrågade egenskaperna.