SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Umeå den 18 november 2017

1. Ett visst spel för två spelare går till på följande sätt: Ett mynt placeras på den första rutan i en rad med nio rutor. Spelarna Xenia och Yngve turas om att göra något av följande drag: flytta myntet framåt ett steg, flytta myntet framåt fyra steg, eller flytta myntet bakåt två steg. För att ett drag ska vara tillåtet måste myntet landa på någon av de nio rutorna. Man vinner om man flyttar myntet till den nionde rutan.

Vem vinner, givet att Xenia gör det första draget, och båda spelarna spelar optimalt?

Lösning. Man kan teckna ett vinst-förlust-diagram, där V står för säker vinst för den spelare vars tur det är, och F står för säker förlust för den spelare vars tur det är.

I ett första steg kan man fylla i F i ruta 9, eftersom man redan förlorat om myntet ligger där och det är ens tur, och ett V i rutorna 5 och 8, eftersom man därifrån med ett tillåtet drag kan vinna direkt.

I nästa steg kan man fylla i ett F i ruta 7, eftersom de enda tillåtna dragen (1 framåt eller 2 bakåt) leder till en ruta där motspelaren vinner. Sammantaget fås då diagrammet nedan:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
				V		F	V	F

Därefter kan man observera att rutorna 6 och 3 är vinnarrutor, eftersom man därifrån kan flytta direkt till ruta 7, som ju är en förlustruta. Vi får diagrammet nedan:

1	2	3	4	5	6	7	8	9
		V		V	V	F	V	F

Observera att ruta 4 inte kan analyseras riktigt än. Ruta 2 är dock en förlustruta, eftersom de enda tillåtna dragen leder till ruta 3 eller 6, som är vinnarrutor. Därför är ruta 4 en vinnarruta, eftersom man därifrån kan flytta till ruta 2. Vi får diagrammet

1	2	3	4	5	6	7	8	9
	F	V	V	V	V	F	V	F

Slutligen är alltså ruta 1 en vinnarruta, eftersom man därifrån kan flytta till ruta 2. Det år alltså Xenia som vinner.

2. Låt p vara ett primtal. Bestäm alla par av relativt prima positiva heltal (m, n), sådana att

$$\frac{p+m}{p+n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{p^2}.$$

Lösning. En omskrivning leder till uttrycket $(n-m)p^3 = np+n^2$. Därmed måste n vara delbart med p, det vill säga $n = kp$, för något heltal $k \geq 1$. Insättning i ekvationen ger $(kp-m)p^3 = kp^2 + k^2p^2$. Division med p^2 ger uttrycket $(kp-m)p = k+k^2$, som kan skrivas om som $pm = k(p^2-k-1)$. Eftersom m och n är relativt prima, det vill säga $\mathrm{SGD}\,(m,n) = 1$, gäller även att $\mathrm{SGD}\,(m,k) = 1$, och därmed måste k vara en delare till p. Således gäller $k = 1$, eller $k = p$. Vi har alltså nedanstående fall att titta på.

(i) $k = 1$: Sambandet mellan m, p och k ger $pm = p^2 - 2$, det vill säga $2 = p(p-m)$. Primtalet p är därför en delare till 2, och det följer att $p = 2$. Vi får då $m = 1$ och $n = 2$.

(ii) $k = p$: Sambandet mellan m, p och k ger $m = p^2 - p - 1$, och vi får också att $n = p^2$.

Insättning visar att de funna paren löser ekvationen. Det finns alltså två lösningar: $(m,n) = (1,2)$, och $(m,n) = (p^2-p-1,\, p^2)$.

3. Sträckorna AB och CD ligger i rummet, inte nödvändigtvis i samma plan. Punkten X är mittpunkt på sträckan AB, och punkten Y är mittpunkt på CD. Givet att punkten X inte ligger på linjen CD, och att punkten Y inte ligger på linjen AB, visa att

$$2|XY| \leq |AD| + |BC|.$$

När uppnås likhet?

Lösning. Låt O vara mittpunkten på sträckan AC. Enligt triangelolikheten gäller[1] $XY \leq XO + OY$, med likhet om och endast om O ligger på sträckan XY. Trianglarna ABC och AXO är likformiga, enligt sida-vinkel-sida-fallet, och det följer att

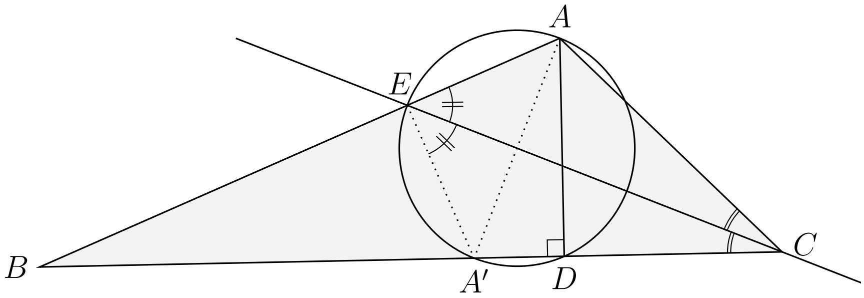
$$\frac{XO}{BC} = \frac{AX}{AB} = \frac{1}{2}, \text{ det vill säga att } \; 2XO = BC.$$

På samma sätt fås att $2YO = AD$, så att $2XY \leq AD + BC$, med likhet om och endast om O ligger på sträckan XY.

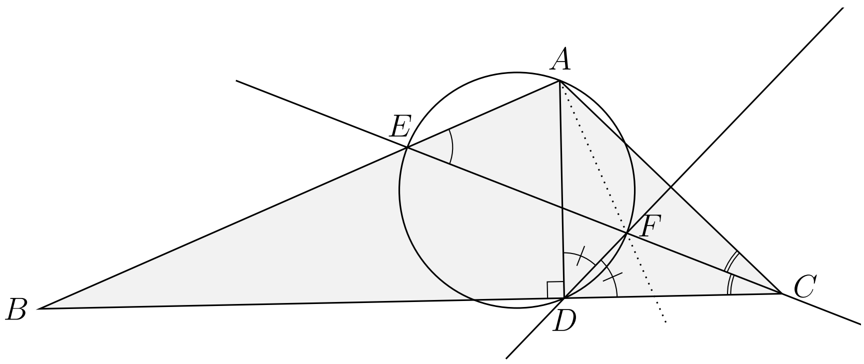
Att O ligger på sträckan XY medför att sträckan XY är parallell med såväl BC som AD, vilket i sin tur ger $AD \| BC$. (Bland annat följer att de fyra punkterna ligger i ett plan.) För att O ska kunna ligga på sträckan XY måste C och D ligga på samma sida om linjen AB (annars ligger hela sträckan XY inuti fyrhörningen $DBCA$ och kan därmed inte innehålla någon av dess sidors mittpunkter). Det betyder att likhet inträffar om och endast om fyrhörningen $ABCD$ är ett parallelltrapets.

4. Låt D vara fotpunkten för höjden mot BC i triangeln ABC. Låt E vara skärningen mellan AB och bisektrisen till C. Anta att vinkeln $\angle AEC = 45°$. Bestäm vinkeln $\angle EDB$.

[1] I fortsättningen använder vi beteckningen PQ istället för $|PQ|$.



Lösning 1. Spegla punkten A i linjen CE till punkten A'. Punkten A' ligger på linjen BC, eftersom CE är bisektris till $\angle ACB$. På grund av spegelsymmetrin är $\triangle AA'C$ likbent. Vi har $CA' = CA > CD$, så punkten D ligger mellan C och A'. Enligt villkoren och spegelsymmetrin gäller att $\angle CEA' = \angle CEA = 45°$, så att $\triangle AEA'$ är rätvinklig och likbent, alltså är $\angle EAA' = 45°$. Eftersom $\triangle AA'D$ också är rätvinklig, och AA' är hypotenusa i båda dessa trianglar, har vi att punkterna A, E, A', D ligger på cirkeln med diameter AA'. Enligt randvinkelsatsen är den önskade vinkeln $\angle EDB = \angle EDA' = \angle EAA' = 45°$.



Lösning 2. Dra bisektrisen till $\angle ADC$ och låt F vara skärningen mellan den bisektrisen och CE. Eftersom F är skärningen mellan två bisektriser i triangeln $\triangle ADC$, och de tre bisektriserna i en triangel skär varandra i en punkt, måste AF vara bisektrisen till $\angle DAC$. Vidare är $\angle AEF = \angle ADF = 45°$, och punkterna D och E ligger på samma sida linjen AF. Enligt omvändningen till randvinkelsatsen är fyrhörningen $AEDF$ inskriven (det vill säga, punkterna A, E, D, F ligger på en cirkel). Låt $\varphi = \angle ECA = \angle FCA = \angle FCD = \angle ECD$. Då blir $\angle DAF = \angle FAC = \frac{1}{2} \cdot (180° - 90° - 2\varphi) = 45° - \varphi$ och, enligt randvinkelsatsen, är också $\angle DEF = 45° - \varphi$. Yttervinkelsatsen på triangeln DEC ger till sist att $\angle EDB = \angle DEC + \angle ECD = (45° - \varphi) + \varphi = 45°$.

Lösning 3. Beteckna vinklarna i $\triangle ABC$ vid A, B, C med α, β, γ, respektive. Enligt yttervinkelsatsen har vi $\angle BEC = \alpha + \frac{\gamma}{2} = 135°$, och $\angle AEC = \beta + \frac{\gamma}{2} = 45°$, vilket medför $\alpha = 90° + \beta > 90°$. Sidovinkeln till vinkeln vid A är då spetsig, och den är (återigen enligt yttervinkelsatsen) lika med $45° + \frac{\gamma}{2}$, så att $2 \cdot \left(45° + \frac{\gamma}{2}\right) = 90° + \gamma$. Låt P vara den punkt på linjen AB, som uppfyller $CP = CA, P \neq A$. Ovanstående resonemang visar att A ligger mellan B och P, samt att

$$\angle PCB = \angle PCA + \angle ACB = (180° - (90° + \gamma)) + \gamma = 90°.$$

Därmed har vi $\triangle BPC \sim \triangle BAD$. Tillsammans med bisektrissatsen ger det

$$\frac{AE}{BE} = \frac{CA}{CB} = \frac{CP}{CB} = \frac{DA}{DB},$$

och av bisektrissatsens omvändning följer nu att DE är bisektris till $\angle ADB$, vilket betyder att $\angle EDB = 45°$.

5. Bestäm en konstant C sådan att

$$\frac{S}{ab+bc+ca} \leq C,$$

där a, b, c är sidlängderna i en godtycklig triangel, och S är samma triangels area. (Full poäng ges för den bästa möjliga konstanten, med motivering.)

Lösning 1. Vi använder formeln $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$, etc. Det ger

$$\frac{ab+bc+ca}{S} = \frac{\frac{2S}{\sin\gamma} + \frac{2S}{\sin\alpha} + \frac{2S}{\sin\beta}}{S} = \frac{2}{\sin\alpha} + \frac{2}{\sin\beta} + \frac{2}{\sin\gamma} > 6.$$

En möjlighet är alltså att välja $C = \frac{1}{6}$.

En bättre, det vill säga mindre, konstant får vi om vi inser att den minsta vinkeln i varje triangel är mindre än eller lika med $60°$. Vi kan då ersätta en av kvoterna med $\frac{4}{\sqrt{3}}$ istället för 2.

Vi ska visa att den bästa möjliga konstanten är $\frac{\sqrt{3}}{12}$. Vi måste visa att *(i)* $C = \frac{\sqrt{3}}{12}$ fumgerar; *(ii)* inget mindre C-värde fungerar.

(i) Vi visar först olikheten

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) \geq 9,$$

för alla positiva tal x, y, z. Vi har

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right) = 1+1+1+\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right) \geq$$
$$\geq 3+2+2+2 = 9,$$

med likhet om och endast om $x = y = z$.

Det betyder att olikheten

$$\frac{2}{\sin\alpha} + \frac{2}{\sin\beta} + \frac{2}{\sin\gamma} \geq \frac{1}{C},$$

som kan skrivas om som

$$\frac{2}{\sin\alpha} + \frac{2}{\sin\beta} + \frac{2}{\sin\gamma} = 2\cdot\left(\frac{1}{\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\beta}+\frac{1}{\sin\gamma}\right)\cdot\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma} \geq \frac{1}{C},$$

kommer garanterat att gälla om olikheten

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{18} \leq C$$

gäller. För att hitta den bästa möjliga konstanten måste vi alltså hitta det största värdet $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma$ kan ha, när α, β, γ är vinklarna i en triangel. Vi har

$$\begin{aligned}\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma &= \sin\alpha + \sin\beta + \sin(\alpha+\beta) = \\ &= \sin\alpha + 2\sin\frac{\alpha+2\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}.\end{aligned}$$

Eftersom $0^\circ < \frac{\alpha}{2} < 90^\circ$, och $0^\circ < \frac{2\beta+\alpha}{2} < 180^\circ$, har vi att $0 < \cos\frac{\alpha}{2} < 1$, och $0 < \sin\frac{\alpha+2\beta}{2} \leq 1$, med likhet om och endast om $2\beta + \alpha = 180^\circ$, det vill säga när $\beta = \gamma$ och triangeln är likbent. Det är nu enkelt att maximera funktionen $g(\alpha) = \sin\alpha + 2\cos\frac{\alpha}{2}$ för $0 \leq \alpha \leq \pi$. Vi har $g(0) = g(\pi) = 2$, medan derivatan[2] $g'(\alpha)$ blir lika med 0 för $\alpha = \frac{\pi}{3}$, och $g\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} > 2$. Det största värdet antas alltså i $\frac{\pi}{3}$. Insättning ger att

$$\frac{S}{ab+bc+ca} \leq \frac{\sqrt{3}}{12},$$

med likhet om och endast om triangeln är liksidig.

(ii) Att det finns en triangel som ger likhet betyder att konstanten inte går att förbättra ytterligare.

Anmärkning. Man kan istället använda konvexitet och Jensens olikhet. Betrakta funktionen $f(x) = \frac{1}{\sin x}$. Derivering ger att $f''(x) = \frac{\sin^2 x + 2\cos^2 x}{\sin^3 x} > 0$ för $0 < x < \pi$, vilket betyder att funktionen f är konvex i intervallet $(0, \pi)$. Enligt Jensens olikhet gäller då

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{3}} = f\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) \leq \frac{f(\alpha)+f(\beta)+f(\gamma)}{3} = \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{2}{\sin\alpha} + \frac{2}{\sin\beta} + \frac{2}{\sin\gamma}\right),$$

och det följer att konstanten $C = \frac{\sqrt{3}}{12}$ fungerar.

Lösning 2. Vi börjar med att använda olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medelvärde för tre tal samt areaformeln

$$S = \frac{abc}{4R}.$$

Vi har

$$\frac{3S}{ab+bc+ca} \leq \frac{S}{\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} = \frac{S}{(4R)^{\frac{2}{3}}S^{\frac{2}{3}}} = S^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{1}{(4R)^{\frac{2}{3}}}.$$

Vi är alltså intresserade av den största arean en triangel, inskriven i en cirkel med radien R, kan ha. Av alla trianglar, inskrivna i en given cirkel är det den liksidiga som har störst area. Vi presenterar här ett analytiskt bevis, men påståendet kan även visas helt geometriskt.

Betrakta en godtycklig triangel, inskriven i en cirkel med radie R. Fixera en av dess sidor, som ligger mot en spetsig vinkel. Om triangeln inte är likbent med den valda sidan som

[2] Notera att $(\sin x)' = \cos x$ och $(\cos x)' = -\sin x$ endast gäller om x mäts i radianer.

bas, så finns det en triangel med större area, det är den inskrivna liklbenta triangeln (med den valda sidan som bas). Vi kan därför utan inskränkning[3] anta att vi endast betraktar likbenta trianglar och jämför deras areor med varandra. Beteckna vinkeln mot den valda sidan med 2φ. Det gäller alltså att hitta det värde på $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, för vilket triangelns area är störst. Vi har

$$S(\varphi) = \frac{ch_c}{2} = \frac{c \cdot \dfrac{c}{2\tan\varphi}}{2} = \frac{1}{2} \cdot 2R\sin 2\varphi \cdot 2R\cos^2\varphi = 2R^2 \sin 2\varphi \cos^2\varphi, \quad \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right).$$

Vi ska hitta $\max S(\varphi)$, för $\varphi \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$. Vi har $S(0) = 0$, och $S\left(\frac{\pi}{4}\right) = R^2$. Derivatan

$$S'(\varphi) = 2R^2 \left(2\cos 2\varphi \cos^2\varphi - 2\sin 2\varphi \cos\varphi \sin\varphi\right) = 4R^2 \cos\varphi \cos 3\varphi,$$

blir lika med 0 en enda gång i intervallet, för $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$, och $S(\varphi_0) = \frac{3R^2\sqrt{3}}{4} > R^2$. Den största arean fås alltså för toppvinkeln som ger en liksidig triangel. Insättning ger återigen den bästa konstanten vi fann tidigare.

Anmärkning. Man kan använda olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medelvärde en gång till för att få

$$\frac{S}{ab + bc + ca} \le \frac{S}{3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}} = \frac{\sqrt[3]{abc}}{12R} \le \frac{a+b+c}{36R},$$

med likhet om och endast om $a = b = c$, det vill säga triangeln är liksidig. Sedan använder man att $a = 2R\sin\alpha$, etc, och avslutar som i lösning 1.

6. Låt a, b, c, x, y, z vara reella tal sådana att $x + y + z = 0$, $a + b + c \ge 0$, $ab + bc + ca \ge 0$. Visa att

$$ax^2 + by^2 + cz^2 \ge 0.$$

Lösning. Vi kan utan inskränkning anta att $a \ge b \ge c$. Då är $a \ge 0$. Om $c \ge 0$ är slutsatsen trivial. Antag att två av talen a, b, c är negativa, det vill säga att $b < 0$ och $c < 0$. Multiplikation av olikheten $a \ge -b - c$ med b respektive c ger då $ab \le -b^2 - cb$, och $ca \le -cb - c^2$, varav $ab + bc + ca \le -b^2 - c^2 - bc < 0$, i strid mot villkoret $ab + bc + ca \ge 0$.

Vi antar därför i fortsättningen att $a, b \ge 0$, och $c < 0$. Då gäller $a + b > 0$, $c(a + b) \ge -ab$, och

$$(a+b)ax^2 + (a+b)by^2 + (a+b)cz^2 \ge (a+b)ax^2 + (a+b)by^2 - ab(x+y)^2.$$

Förenkling av högerledet och olikheten mellan aritmetiskt och geometriskt medelevärde ger

$$\begin{aligned}(a+b)ax^2 + (a+b)by^2 - ab(x+y)^2 &= a^2x^2 + b^2y^2 + ab(x^2 + y^2 - (x+y)^2) = \\ &= a^2x^2 + b^2y^2 - 2abxy \ge \\ &\ge 2ab|xy| - 2abxy = 2ab(|xy| - xy) \ge 0.\end{aligned}$$

[3] Notera att man inte kan bevisa påståendet genom att upprepa samma resonemang med en annan sida.

Eftersom $a + b > 0$ medför detta att $ax^2 + y^2 + z^2 \geq 0$, med likhet om och endast om $c(a + b) = -ab$, $(a|x| - b|y|)^2 = 0$, och $|xy| = xy$, vilket ger $ax = by$, och $(a + b)cz = ab(x + y) = b^2y + aby = (a + b)by$, och det följer att $by = cz$. Då har vi $ax^2 + by^2 + cz^2 = ax^2 + axy + axz = ax(x + y + z) = 0$.

Antag nu att $a \geq b \geq c \geq 0$, och likhet råder i olikheten, det vill säga $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$. Om $a = b = c = 0$ så har vi $ax = by = cz = 0$. Om $a > b = c = 0$, så gäller $ax^2 = 0$, så att $x = 0$, och $ax = 0 = by = cz$. Om slutligen $a \geq b > c = 0$, så har vi $ax^2 + by^2 = 0$, vilket ger $x = y = 0$, och återigen $ax = by = cz = 0$.

Olikheten $ax^2 + by^2 + cz^2 \geq 0$ gäller alltså med likhet om och endast om $ax = by = cz$.