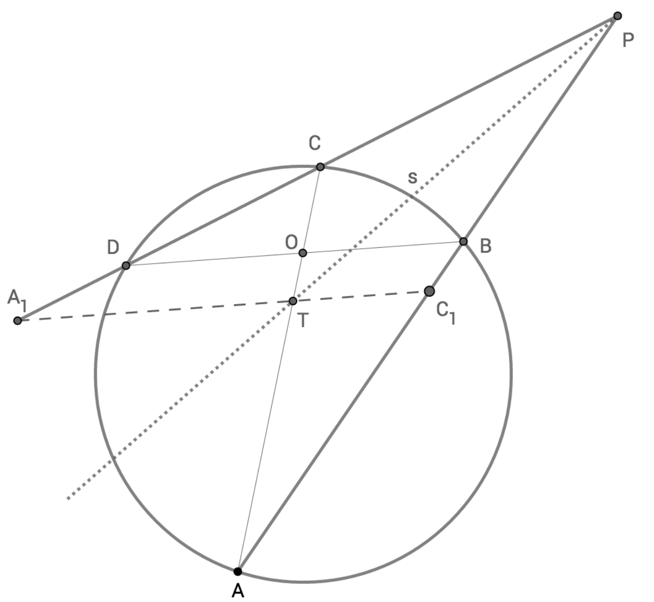
SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Uppsala den 24 november 2018

1. Låt $ABCD$ vara en fyrhörning utan parallella sidor, som är inskriven i en cirkel. Låt P och Q vara skärningspunkterna mellan linjerna som innehåller fyrhörningens motstående sidor. Visa att bisektriserna till vinklarna vid P och Q är parallella med bisektriserna till vinklarna vid skärningspunkten mellan fyrhörningens diagonaler.

Lösning 1. Låt P vara skärningspunkten mellan AB och CD och låt linjen s vara bisektrisen till $\angle AOD$. Beteckna diagonalernas skärningspunkt med O. Vi vill visa att s är parallell med bisektrisen till $\angle BOC$. Argumentet för den andra skärningspunkten Q och den andra bisektrisen vid O är likadant.



Låt A_1 och C_1 vara spegelbilderna av A och C i linjen s och låt T vara skärningspunkten mellan AC och A_1C_1. Punkten T kommer då att ligga på s, som skärningspunkt mellan en sträcka och dess spegelbild.

Enligt randvinkelsatsen har vi $\angle CDB = \angle CAB$, eftersom båda står på samma cirkelbåge. Samtidigt har vi $\angle CAB = \angle CA_1C_1$ (symmetri med avseende på linjen s). Därmed är linjerna DB och A_1C_1 parallella, vilket medför att bisektrisen till $\angle BOC$ är parallell med bisektrisen till $\angle CTC_1$, som är s.

Lösning 2. Vi inför beteckningarna $\varphi = \angle OAB, \psi = \angle OBA,\ \vartheta = \angle OCB,\ \varkappa = \angle OAD$. Enligt randvinkelsatsen har vi $\varphi = \angle ODC, \psi = \angle OCD,\ \vartheta = \angle ODA,\ \varkappa = \angle OBC$, samt $\varphi + \psi + \vartheta + \varkappa = 180°$. Låt PK vara bisektrisen till vinkel APD ($K \in AD$), och låt OL vara bisektrisen till vinkel AOD ($L \in AD$). Vi vill visa att $PK \| OL$.

Vi har

$$\angle DKP = 180^\circ - \vartheta - \varphi - \frac{1}{2} \cdot \angle APD = 180^\circ - \vartheta - \varphi - \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \vartheta - \varphi - \varkappa - \varphi)$$
$$= \psi + \varkappa - \frac{\psi}{2} + \frac{\varphi}{2} = \varkappa + \frac{\varphi + \psi}{2},$$

samt

$$\angle DLO = 180^\circ - \vartheta - \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \vartheta - \varkappa) = \varphi + \psi + \varkappa - \frac{\varphi + \psi}{2} = \varkappa + \frac{\varphi + \psi}{2} = \angle DKP,$$

vilket medför att $PK \| OL$.

2. Hitta alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som uppfyller

$$f(x) + 2f(\sqrt[3]{1 - x^3}) = x^3$$

för alla reella x. (Här är $\sqrt[3]{x}$ definierad på hela $\mathbb{R}$.)

Lösning. Sätt $x = t$ respektive $x = \sqrt[3]{1 - t^3}$ i funktionalekvationen. Vi får ett ekvationssystem:

$$\begin{cases} f(t) + 2f(\sqrt[3]{1 - t^3}) = t^3 \\ f(\sqrt[3]{1 - t^3}) + 2f(t) = 1 - t^3. \end{cases}$$

Ta den första ekvationen minus två gånger den andra för att få:

$$-3f(t) = t^3 - 2(1 - t^3) = 3t^3 - 2,$$

dvs. $f(t) = -t^3 + \frac{2}{3}$. Man kontrollerar lätt att detta verkligen är en lösning till den givna funktionalekvationen.

3. Låt m vara ett positivt heltal. Ett m-*mönster* är en sekvens av m strikta olikhetssymboler. Ett m-mönster sägs *realiseras* av en följd av $m + 1$ reella tal om talen uppfyller var och en av olikheterna i den givna ordningen. (Exempelvis realiseras 5-mönstret $<, <, >, <, >$ av talföljden $1, 4, 7, -3, 1, 0$.)

Givet m, vilket är det minsta heltal n för vilket det existerar någon talföljd $x_1, \ldots, x_n$ sådan att varje m-mönster realiseras av en delföljd $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m+1}}$ med $1 \leq i_1 < \cdots < i_{m+1} \leq n$?

Lösning. Vi ska visa att $n = 2m + 1$ är minimalt med den sökta egenskapen. Först noterar vi att $n \leq 2m$ inte duger. Antag nämligen motsatsen och låt M_1 vara det växande m-mönstret $<, <, \ldots, <$ och M_2 det avtagande $>, >, \ldots, >$. De delföljder som realiserar M_1 respektive M_2 innehåller (åtminstone) två gemensamma tal, säg x_i och x_j, $1 \leq i < j \leq n$. Då M_1 realiseras fås $x_i < x_j$ och då M_2 realiseras gäller $x_i > x_j$, vilket ger en motsägelse.

Nu ska vi se att $n = 2m + 1$ räcker. Betrakta talföljden

$$F = (x_1, x_2, \ldots, x_{2m+1}) = (0, 1, -1, 2, -2, \ldots, m, -m).$$

Fixera ett godtyckligt m-mönster M. För att realisera det med en delföljd av F gör vi som följer. Låt $i_1 = 1$. För $1 \leq j \leq 2m$ konstrueras rekursivt i_{j+1} som det minsta tal större än i_j som gör att x_{i_j} och $x_{i_{j+1}}$ uppfyller den ordningsrelation som ges av den j:e symbolen i M. Per konstruktion av F fås $1 \leq i_{j+1} - i_j \leq 2$ och därför ger proceduren en följd av $m+1$ tal $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m+1}}$ som realiserar M.

4. Finn det minsta positiva heltalet n med egenskapen: Bland godtyckligt valda n på varandra följande positiva heltal, alla mindre än 2018, finns minst ett som är delbart med sin siffersumma.

Lösning 1. Vi ska visa att det minsta talet med den önskade egenskapen är 18.

Bland 18 på varandra följande positiva heltal är precis två delbara med 9. Den övre begränsningen 2018 ger att siffersumman kan vara maximalt $1 + 3 \cdot 9 = 28$, så att siffersummorna för dessa två tal delbara med 9 kan vara $9, 18$ eller 27.

Om siffersumman av ett av de två talen är 9 så är talet delbart med 9.

Om siffersumman av ett av de två talen är 27 så är talet lika med $999, 1899, 1989$ eller 1998. Det första och det sista av dessa är båda delbara med 27. Om 1899 är ett av talen så kommer listan att innehålla 1900 eller 1890, båda delbara med respektive siffersumma. Om ett av talen är 1989, så innehåller listan antingen 1980 eller 1998, återigen båda delbara med respektive siffersumma.

Om båda talen har siffersumma 18 så är ett av talen udda medan det andra är jämnt, och därför delbart med $2 \cdot 9 = 18$.

Vi ska nu visa att man kan hitta 17 på varandra följande tal, mindre än 2018, och sådana att inget av dem är delbart med sin siffersumma. Av resonemangen ovan följer att det bland de 17 talen måste finnas exakt ett tal, delbart med 9, vars siffersumma måste vara 18, och att detta tal måste vara udda. Om vi betecknar det talet med m, så måste listan över de 17 talen vara $m - 8, \ldots, m - 1, m, m + 1, \ldots, m + 8$. Alla ensiffriga tal är delbara med sin siffersumma. Varje lista av 17 på varandra följande tvåsiffriga tal kommer att innehålla minst ett tal, som är delbart med 10, och det talet kommer att vara delbart med sin siffersumma. De 17 talen kan inte inkludera några tresiffriga tal, delbara med hundra. Därmed kan det inte finnas några en- eller tvåsiffriga tal bland dem. Talet m kan inte sluta på 9, eftersom $m + 1$ då har siffersumman 10 och är delbart med 10. De tresiffriga m som kan komma ifråga är då (i storleksordning)

$$387, 477, 567, 585, 657, 675, 747, 765, 783, 837, 855, 873, 891, 927, 945, 981.$$

Direkt kontroll visar att $m = 567$ ger en lista över 17 tal, inget av dem delbart med sin siffersumma.

Därmed har vi visat att det minsta talet med den önskade egenskapen är mindre än eller lika med 18, samt större än 17, och måste därför vara 18.

Lösning 2. Betrakta alla tal som är delbara med 18 och mindre än 2018. Dessa tal är även delbara med 9, och därmed är siffersumman för vart och ett av dem delbar med 9. Som ovan får vi att siffersumman kan vara $9, 18$ eller 27. Om siffersumman för ett av talen är 9 eller 18, så är talet delbart med sin siffersumma. Den enda multipel av 18 som är mindre än 2018 och har siffersumma 27 är 1998. Eftersom 1998 är delbart med 27 har vi därmed visat att det bland 18 på varandra följande tal alltid finns ett som är delbart med sin siffersumma. Motexempel för 17 kan hittas som ovan.

5. I en triangel ABC dras två linjer som tillsammans tredelar vinkeln vid A. Dessa skär sidan BC i punkterna P och Q så att P ligger närmre B och Q ligger närmre C. Bestäm den minsta konstant K sådan att

$$|PQ| \leq K(|BP| + |QC|),$$

för alla sådana trianglar. Avgör om det finns trianglar för vilka likhet gäller.

Lösning 1. Om vinklarna i triangeln är α, β och γ kan vi beräkna

$$\begin{aligned}
|BP| &= \frac{a}{\sin\alpha}\frac{\sin\gamma\sin(\alpha/3)}{\sin(\beta+\alpha/3)}\\
|PQ| &= \frac{a}{\sin\alpha}\frac{\sin\gamma\sin\beta\sin(\alpha/3)}{\sin(\beta+\alpha/3)\sin(\gamma+\alpha/3)}\\
|QC| &= \frac{a}{\sin\alpha}\frac{\sin\beta\sin(\alpha/3)}{\sin(\gamma+\alpha/3)}
\end{aligned}$$

Därmed är

$$\frac{|BP|+|QC|}{2|PQ|} = \frac{\sin(\gamma)\sin(\gamma+\alpha/3)+\sin(\beta)\sin(\beta+\alpha/3)}{2\sin(\beta)\sin(\gamma)}$$

Vi kan använda AG-olikhet för att få

$$\frac{|BP|+|QC|}{2|PQ|} \geq \frac{\sqrt{\sin(\gamma+\alpha/3)\sin(\beta+\alpha/3)}}{\sqrt{\sin(\beta)\sin(\gamma)}}$$

Kvadrerar vi högerledet och skriver om det får vi

$$\frac{\cos(\gamma-\beta)+\cos(2\alpha/3)}{\cos(\beta-\gamma)+\cos(\alpha)} > 1$$

eftersom $\cos(2\alpha/3) > \cos(\alpha)$ för $0 < \alpha < \pi$.
Det kan inte finnas några trianglar med likhet eftersom den sista olikheten är strikt då $\alpha > 0$. Däremot kan vi komma godtyckligt nära genom att ta α godtyckligt litet och $\beta = \gamma$ som ger likhet i den första olikheten. Därmed är $K = 1/2$ den minsta konstant som gör att olikheten är uppfylld för alla trianglar.

Lösning 2. Beteckna $|AB| = c, |BC| = a, |CA| = b, |BP| = x, |PQ| = y, |QC| = z, |AP| = s, |AQ| = t$. Vi ska visa att $bc > st$, och att $x + z > 2y$.
Formeln för bisektrislängden i en triangel, tillämpad på triangeln ABQ och bisektrisen AP, ger $s^2 = ct - xy < ct$. På samma sätt får vi att $t^2 = bs - yz < bs$. Det följer att $s^2t^2 < ct \cdot bs$, vilket ger $st < bc$. Bisektrissatsen ger nu

$$x + z = \frac{cy}{t} + \frac{by}{s} = \left(\frac{c}{t} + \frac{b}{s}\right) y \geq 2y\sqrt{\frac{bc}{st}} > 2y.$$

Likhet kan inte komma ifråga, eftersom det skulle betyda att $xy = yz = 0$, vilket är omöjligt. Vi ska visa att kvoten $\dfrac{bc}{st}$ kan komma hur nära 1 som helst. Betrakta likbenta trianglar där $b = c$ och höjden h_a från A hålls konstant. Låt a gå mot 0. Då kommer $b, c, s, t \to h_a$, och kvoten kommer alltså att gå mot 1.

6. För vilka positiva heltal n kan polynomet

$$p(x) = 1 + x^n + x^{2n}$$

skrivas som en produkt av två polynom med heltalskoefficienter (av grad ≥ 1)?

Lösning 1. Det är möjligt om och endast om n inte är en trepotens. Vi börjar med att visa att p_n delar p_{kn} om $k \geq 1$ inte är delbart med 3.

Vi har (enligt formeln för geometrisk summa)

$$\frac{p_{kn}(x)}{p_n(x)} = \frac{1 + x^{kn} + x^{2kn}}{1 + x^n + x^{2n}} = \frac{1 - x^{3kn}}{1 - x^{kn}} \cdot \frac{1 - x^n}{1 - x^{3n}}.$$

Vi börjar med att visa att divisionen går jämnt ut över $\mathbb{C}$. Betrakta nollställena till täljare och nämnare. Alla dessa blir enhetsrötter (där $x = 1$ är ointressant), som har formen $e^{m\theta}$, där m är ett heltal och $\theta = \dfrac{2\pi i}{3kn}$. De multipler som förekommer i de fyra olika faktorerna är

$$\frac{(0), 1, 2, 3, 4, \ldots, 3kn - 1}{\text{multipler av } 3} \cdot \frac{\text{multipler av } 3k}{\text{multipler av } k}$$

det vill säga alla nollställen i täljaren är enkla och "äts upp" av den första faktorn i nämnaren *utom* dem där m är en multipel av 3 *och* en multipel av k; dessa m ger nollställen som är dubbla. Men dessa förekommer ju även i den andra faktorn i täljaren, så alla nollställen i nämnaren (med multiplicitet) matchas av nollställen i täljaren. Det visar att divisionen går jämnt upp. (Här utnyttjas att k inte är delbart med 3.)

Polynomet p_{kn} kan alltså faktoriseras över $\mathbb{C}$, men i själva verket över $\mathbb{Q}$ (tänk på polynomdivisionsalgoritmen!). Gauss lemma visar att faktoriseringen fungerar över $\mathbb{Z}$.

Om n inte är en trepotens, kan man skriva $n = kq$, där k inte är delbart med 3, och det följer att $p_n(x) = p_q(x) \cdot$ något polynom, båda med heltalskoefficienter.

Omvänt, om $n = 3^k$ ska vi visa att p_n är irreducibelt över $\mathbb{Z}$, det vill säga att p_n inte kan skrivas som produkt av polynom med koefficienter i $\mathbb{Z}$. Låt $q(x) = p_n(x+1)$, dvs.

$$q(x) = 1 + (x+1)^{3^k} + (x+1)^{2 \cdot 3^k} = 1 + \sum_{j=0}^{3^k} \binom{3^k}{j} x^j + \sum_{j=0}^{2 \cdot 3^k} \binom{2 \cdot 3^k}{j} x^j$$

Notera att konstanttermen i $q(x)$ är 3 och högstagradskoefficienten är 1. Vi hävdar att övriga koefficienter är delbara med 3. Om detta är sant, ger Eisensteins kriterium att q är irreducibelt, och därmed är också p_n irreducibelt.

För att visa det sista påståendet behöver vi tre lemman.

Lemma 1. $\binom{3^k}{j} \equiv 0 \pmod 3$ för $1 \leq j \leq 3^k - 1$.

Detta går att visa på olika sätt. Här är ett kombinatoriskt argument med induktion över k. Påståendet är sant för $k = 1$, eftersom $\binom{3}{1} = \binom{3}{2} = 3$.

Tag en mängd av 3^{k+1} element och dela upp den i tre delar, vardera med 3^k element. Vi vill visa att antalet delmängder med exakt j element måste vara delbart med 3.

Delmängder, där antalet element som ligger i vardera tredjedel är olika, kan paras ihop i grupper om 3! (permutera tredjedelarna). Delmängder där antalet element i exakt två av tredjedelarna är lika, kan paras ihop i grupper om 3 (permutera den avvikande tredjedelen). Det totala antalet av dessa typer är alltså delbart med 3.

Slutligen måste vi titta på delmänger med samma antal i varje tredjedel, men dessa är $\binom{3^k}{j/3}^3$, vilket enligt induktionsantagandet också är delbart med 3. Därmed ger induktion påståendet i lemmat.

Lemma 2. $\binom{2\cdot 3^k}{3^k} \equiv 2 \pmod 3$.

Bevis av lemma 2. Det är välkänt att

$$\binom{2n}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2.$$

Påståendet följer därför ur lemma 1 (med $n = 3^k$).

Lemma 3. $\binom{2\cdot 3^k}{j} \equiv 0 \pmod 3$ för $1 \leq j \leq 3^k - 1$.

Kan till exempel bevisas precis som lemma 1.

Om vi kombinerar lemma 1, 2 och 3 följer påståendet om koefficienterna till q. (Koefficienten för x^{3k} är kongruent med $1 + 2$, övriga med $0 + 0$.)

Lösning 2. Vi kan använda att $(x^{2n} + x^n + 1)(x^n - 1) = x^{3n} - 1$ för att se att $\xi = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ är nollställe till $x^{2n} + x^n + 1$ om n inte är delbart med 3. Därmed är $x^{2n} + x^n + 1$ delbart med $x^2 + x + 1$ i dessa fall. Om vi har en faktorisering av $x^{2n} + x^n + 1 = p(x)q(x)$ för något n får vi en faktorisering av $x^{2kn} + x^{kn} + 1 = p(x^k)q(x^k)$ för alla heltal k och därmed kan inte $x^{2n} + x^n + 1$ vara irreducibelt om $n > 1$ är delbart med något primtal $p \neq 3$. Det återstår att undersöka fallet då $n = 3^k$, $k \geq 1$.

Om vi har $x^{2n} + x^n + 1 = p(x)q(x)$ har vi att $p(1)q(1) = 3$. Dessutom har vi att $p(x) = \prod(x^2 + a_i x + 1)$ och $q(x) = \prod(x^2 + b_i x + 1)$ där a_i och b_i är $-2\cos\theta$ för något θ, vilket ger att de alla är positiva för alla reella x. Alltså kan vi anta att $p(1) = 3$ och $q(1) = 1$.

Om vi reducerar modulo 3 får vi

$$x^{2\cdot 3^k} + x^{3^k} + 1 \equiv (x^2 + x + 1)^{3^k} \equiv (x - 1)^{2\cdot 3^k} \pmod 3$$

eftersom $(a+b)^3 \equiv a^3 + b^3 \pmod 3$ och därmed $(a+b+c)^{3^k} \equiv a^{3^k} + b^{3^k} + c^{3^k} \pmod 3$, för $k \geq 0$.

Om vi reducerar modulo 3 får vi alltså $q(x) \equiv (x - 1)^m \pmod 3$, där $m = \deg q(x)$. Eftersom $q(1) = 1$ måste $m = 0$ och vi ser att det inte finns någon icke-trivial faktorisering av $x^{2\cdot 3^k} + x^{3^k} + 1$.

Vi drar slutsatsen att $x^{2n} + x^n + 1$ är irreducibelt precis om $n = 3^k$ för något heltal $k \geq 0$.