SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling den 21 november 2020

1. Hur många av talen $1 \cdot 2 \cdot 3,\ \ 2 \cdot 3 \cdot 4,\ \ \ldots,\ \ 2020 \cdot 2021 \cdot 2022$ är delbara med 2020?

Lösning. Talet 2020 har primtalsfaktorisering $2^2 \cdot 5 \cdot 101$. Ett tal är delbart med 2020 om och endast om det är delbart med $4, 5$ och 101. Betrakta ekvationerna

$$n \cdot (n+1) \cdot (n+2) \equiv 0 (\text{mod } 4, 5 \text{ eller } 101).$$

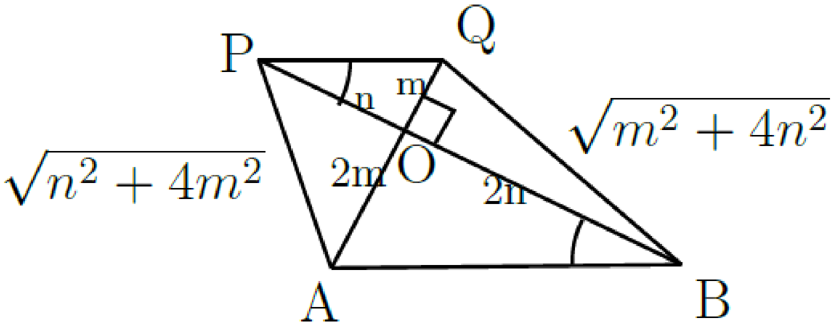
Vi ser att $n \equiv -2, -1$, eller 0 modulo vart och ett av talen $4, 5, 101$. Det finns 27 möjliga kombinationer. Enligt den kinesiska restsatsen finns det för var och en av kombinationerna ett entydigt bestämt tal mellan 1 och 2020 som satisfierar den. Antalet lösningar är alltså 27.

Anmärkning. Man kan lösa uppgiften utan att använda den kinesiska restsatsen genom att helt enkelt lista de 27 möjliga fallen.

2. Medianerna till sidorna AC och BC i triangeln ABC är rätvinkliga mot varandra. Visa att

$$\frac{1}{2} < \frac{|AC|}{|BC|} < 2.$$

Lösning. Låt P och Q vara mittpunkterna på AC respektive BC. Betrakta fyrhörningen $APQB$. Denna är ett parallelltrapets, där AB och PQ är parallella, $|AB| = 2|PQ|$, och diagonalerna AQ och BP är vinkelräta mot varandra. Låt O vara skärningspunkten mellan AQ och BP.



Trianglarna AOB och QOP är likformiga med koefficient $2 : 1$. Låt $m = |OQ|$ och $n = |OP|$. Då har vi $|OA| = 2m$ och $|OB| = 2n$. Pythagoras sats ger $|BQ|^2 = m^2 + 4n^2$ och $|AP|^2 = 4m^2 + n^2$. Det följer att $\frac{|AP|^2}{|BQ|^2} = \frac{4m^2+n^2}{m^2+4n^2}$, och vi får olikheterna

$$\frac{1}{4} = \frac{4m^2+n^2}{16m^2+4n^2} < \frac{4m^2+n^2}{m^2+4n^2} < \frac{4m^2+16n^2}{m^2+4n^2} = 4$$

Därför gäller
$$\frac{1}{2} < \frac{|AP|}{|BQ|} < 2.$$
Slutligen, $\frac{|AC|}{|AB|} = \frac{2|AP|}{2|QB|} = \frac{|AP|}{|QB|}$, så att $\frac{1}{2} < \frac{|AC|}{|BC|} < 2$.

3. Bestäm alla begränsade funktioner
$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$
som uppfyller
$$f(f(x) + y) = f(x) + f(y),$$
för alla reella x, y.

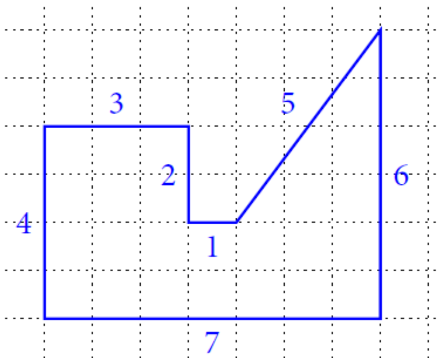
Lösning. Om f är en konstant funktion, $f \equiv C$, gäller att $C = C + C$, så att $C = 0$. Omvänt, $f \equiv 0$ satisfierar ekvationen.

Antag nu att f inte är identiskt lika med 0. Då finns ett reellt tal x_1 sådant att $f(x_1) \neq 0$. Vi har
$$\begin{aligned} f(f(x_1) + x_1) &= f(x_1) + f(x_1) = 2f(x_1), \\ f(f(f(x_1) + x_1) + x_1) &= f(f(x_1) + x_1) + f(x_1) = 3f(x_1), \\ \ldots \end{aligned}$$
Det följer nu (induktivt) att f:s värdemängd innehåller $nf(x_1)$ för varje positivt heltal n. Eftersom $f(x_1) \neq 0$ strider detta mot att f är en begränsad funktion.

Därmed måste f vara en konstant funktion och vi får att den enda lösningen är $f \equiv 0$.

4. Vilket är det minsta positiva heltalet n för vilket det går att hitta en (icke-degenererad) n-hörning med sidlängder 1, 2, ..., n, och där alla hörn har heltalskoordinater?

Lösning. Svar: $n = 7$. Att $n = 7$ är möjligt ses exempelvis ur nedanstående figur:



Det är klart att det inte går för $n = 3$ (det finns överhuvud taget ingen triangel med sidlängder 1, 2, 3).

För $n = 4$ konstaterar vi att alla sidor måste vara axelparallella, så fyrhörningen måste i själva verket vara en rektangel, vilket förstås är omöjligt.

Varje sträcka kan ses som en förflyttning i x och/eller y-led. Om vi har en fungerande polygon, så noterar vi att summorna av alla förflyttningar i x-led och y-led (med tecken) var för sig måste bli 0, eftersom polygonen har samma start- och slutpunkt.

I synnerhet måste det finnas ett jämnt antal förflyttningar av udda längd i både x- och y-led var för sig (ett udda antal udda förflyttningar kan omöjligen summera till 0 – tänk kongruens modulo 2).

Om $n < 10$ måste alla sträckor, utom den av längd 5 vara axelparallella. Notera dock att sträckan 5 ger exakt en udda förflyttning i x- eller y-led, oavsett om den placeras axelparallellt $(5 + 0)$ eller ”diagonalt” $(3 + 4)$.

För $n = 5$ och $n = 6$ får vi således totalt tre udda förflyttningar (ur sträckorna med längd, 1, 3 respektive 5), och det kan alltså inte finnas någon sådan polygon för $n = 5$ eller $n = 6$.

5. Finn alla heltal a sådana att det finns något primtal $p \geq 5$ som delar

$$\binom{p-1}{2} + \binom{p-1}{3}a + \binom{p-1}{4}a^2 + \cdots + \binom{p-1}{p-3}a^{p-5}.$$

Lösning. Låt $p \geq 5$ vara ett primtal och sätt

$$X_p(a) = \binom{p-1}{2} + \binom{p-1}{3}a + \binom{p-1}{4}a^2 + \cdots + \binom{p-1}{p-3}a^{p-5}.$$

Nedan används $\equiv$ för att beteckna likhet modulo p.

Om $a \not\equiv 0$ och $1 + a \not\equiv 0$, får vi tack vare binomialsatsen och Fermat att

$$\begin{aligned} a^3 X_p(a) &= a((1+a)^{p-1} - (1 + (p-1)a + (p-1)a^{p-2} + a^{p-1})) \\ &\equiv a(1 - 1 + a + a^{p-2} - 1) \\ &\equiv a^2 - a + 1. \end{aligned}$$

Om istället $1 + a \equiv 0$, fås

$$a^3 X_p(a) \equiv a(-1 + a + a^{p-2} - 1) \equiv a^2 - 2a + 1 \equiv 4 \not\equiv 0.$$

Om slutligen $a \equiv 0$ kan vi konstatera $X_p(a) \not\equiv 0$ direkt ur definitionen.

Låt oss notera att $a \equiv 0 \Rightarrow a^2 - a + 1 \equiv 1$ och $a \equiv -1 \Rightarrow a^2 - a + 1 \equiv 3$. Om p delar $a^2 - a + 1$ kan alltså p inte dela a eller $1 + a$. För alla heltal a är $a^2 - a + 1$ udda och positivt. Därför finns ett primtal $p \geq 5$ som delar $X_p(a)$ om och endast om $a^2 - a + 1$ inte är en trepotens. Vi har

$$a^2 - a + 1 = 3^m \Leftrightarrow 2a = 1 \pm \sqrt{4 \cdot 3^m - 3}.$$

Om $m \geq 2$, kan inte $4 \cdot 3^m - 3$ vara en jämn kvadrat, eftersom talet är delbart med 3 men inte med 9. För $m \in \{0, 1\}$ fås $a \in \{-1, 0, 1, 2\}$.

Svar: Alla heltal utom -1, 0, 1 och 2.

6. En ändlig mängd av axelparallella kuber i rummet har egenskapen att varje punkt i rummet ligger i högst M olika kuber. Visa att man kan dela upp mängden av kuber i $8(M - 1) + 1$ delmängder (eller färre) med egenskapen att kuberna i varje delmängd saknar gemensamma punkter. (En axelparallell kub är en kub vars kanter är parallella med koordinataxlarna.)

Lösning. Vi gör ett induktionsbevis över antalet kuber n i mängden. Om $n = 1$ finns inget att visa. Antag att $n > 1$ och att påståendet i problemet är sant för fallet med $n - 1$ kuber. Fixera en kub Q med minimal sidlängd. På grund av den minimala sidlängden kommer varje annan kub $\tilde{Q}$ som inte är disjunkt med Q att innehålla minst ett av Q:s 8 hörn. Alltså kommer det finnas högst $8(M - 1)$ kuber $\tilde{Q}$ som inte är disjunkta med Q. Betrakta nu de $n - 1$ kuber i mängden som utgörs av alla kuber utom Q. Enligt induktionsantagandet finns en uppdelning av dessa $n - 1$ kuber i högst $8(M-1)+1$ delmängder med disjunkta kuber. Om det skulle finnas färre än $8(M-1)+1$ delmängder kan vi lägga till så många tomma mängder så att det blir exakt $8(M-1)+1$ delmängder. Vi noterar nu att kuben Q måste vara disjunkt med alla kuber i minst en av dessa $8(M-1)+1$ delmängder, eftersom högst $8(M-1)$ kuber inte är disjunkta med Q. Påståendet följer för fallet med n kuber och via induktion för godtyckligt n.