SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Linköping den 20 november 2021

1. I en triangel bildar både sidorna och vinklarna aritmetiska följder. Bestäm triangelns vinklar.

Lösning. Det är uppenbart att en liksidig triangel uppfyller villkoren. Vi ska visa att en triangel som uppfyller villkoren måste vara liksidig. Beteckna triangelns sidlängder med $BC = a,\ CA = b,\ AB = c$ och de motstående vinklarna med α, β, γ. Eftersom en större sida ligger mot en större vinkel kan vi utan inskränkning anta att $a \leq b \leq c$, och $\alpha \leq \beta \leq \gamma$. Nyckelobservationen är att $\alpha + \beta + \gamma = 2\beta + \beta = 180°$, så att $\beta = 60°$ (det är egentligen det enda om vinklarna som används).

Lösning 1. *Geometrisk:* Antag att $c > a$. Tag en punkt P på sidan AB sådan att $BP = a$. Vi får att $CP = a$ och $\angle CPA = 120°$. Om Q är A:s ortogonalprojektion på linjen CP får vi att $PQ = \frac{1}{2}AP = \frac{c-a}{2}$. Ur den rätvinkliga triangeln CQA får vi

$$CQ = a + \frac{c-a}{2} = \frac{a+c}{2} = b < CA = b,$$

en motsägelse. Därmed gäller $\alpha = \beta = \gamma = 60°$.

Lösning 2. *Sinussatsen:* Låt R beteckna den omskrivna cirkelns radie. Vi har $a = 2R\sin\alpha,\ b = 2R\sin\beta,\ 2R\sin\gamma$, så att

$$2R\sin\beta = \frac{2R\sin\alpha + 2R\sin\gamma}{2},$$

och därmed

$$\sqrt{3} = \sin\alpha + \sin(120° - \alpha),$$

vilket leder till

$$\sqrt{3}\sin\alpha + \cos\alpha = 2 \quad \Leftrightarrow \quad \sin(\alpha + 30°) = 1,$$

och det följer att $\alpha = \gamma = 60°$.

Lösning 3. *Cosinussatsen:*

$$b^2 = a^2 + c^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot ac = \left(\frac{a+c}{2}\right)^2,$$

vilket lätt förenklas till $(a-c)^2 = 0$. Därmed gäller $a = c$ och triangeln måste vara liksidig.

2. Anna är ute och handlar frukt. Hon observerar att fyra apelsiner, tre bananer och en citron kostar precis lika mycket som tre apelsiner och två citroner (alla priser är i hela kronor). Precis då ringer hennes kompis Bengt, och Anna berättar detta för honom. Bengt klagar, ”den informationen räcker inte för att jag ska veta hur mycket varje frukt kostar”.

”Nej”, säger Anna, ”men tre apelsiner och två citroner kostar lika många kronor som din mamma är gammal[1]. Tyvärr räcker det inte heller, men om hon hade varit yngre så hade informationen varit tillräcklig för att du ska kunna räkna ut vad frukterna kostar.”

Hur gammal är Bengts mamma?

Lösning. Vi får ekvationerna

$$4a + 3b + c = 3a + 2c = M$$

där M är Bengts mors ålder. Det gäller alltså att:

$$a + 3b = c$$

där a och b är heltal. Ur detta ser vi att $M = 5a + 6b$, vilket är en diofantisk ekvation med lösningar

$$\begin{cases} a = -M + 6q \\ b = \quad M - 5q. \end{cases}$$

Eftersom a och b måste vara positiva, följer att

$$\frac{M}{6} < q < \frac{M}{5}.$$

Att det inte går att avgöra åldern utan ytterligare information betyder att ekvationen har flera giltiga lösningar. För att det ska hända, krävs att det finns minst två heltal q som uppfyller olikheten ovan. Att det skulle gått att avgöra om mamman varit yngre betyder att vi måste välja det minsta M för vilket det händer. Eftersom vi har strikta olikheter betyder det att

$$\frac{M-1}{5} - \frac{M+1}{6} \geq 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{M}{30} \geq 1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{41}{30},$$

så att $M \geq 41$. Insättning visar att $M = 41$ verkligen ger två lösningar: $q = 7$ eller $q = 8$, vilket svarar mot $a = 1,\ b = 6,\ c = 19$ respektive $a = 7,\ b = 1,\ c = 10$. Bengts mamma måste alltså vara 41 år gammal.

3. Fyra mynt är utlagda på ett bord, så att de bildar hörnen i en kvadrat. Ett *drag* består av att flytta ett av mynten genom att låta det hoppa över ett av de andra mynten så att det hamnar på den direkt motsatta sidan det andra myntet, lika långt ifrån som det var innan draget gjordes. Går det att göra ett antal drag så att mynten hamnar i hörnen av en kvadrat med annan sidlängd än den ursprungliga kvadraten?

Lösning. Vi inför ett rätvinkligt koordinatsystem i bordets plan så att den ursprungliga kvadratens hörn ligger i punkterna med koordinater $(0,0),\ (1,0),\ (1,1),\ (0,1)$. Efter ett godtyckligt antal drag kommer mynten att ligga i punkter med heltalskoordinater. Det betyder att man inte kan få en kvadrat med mindre sidlängd än 1. Antag att man genom att utföra dragen $d_n d_{n-1} \ldots d_2 d_1$ (i ordning från höger till vänster) kan få en kvadrat med

[1] räknat i år

sidlängd $k > 1$. Ett mynt man hoppar över ligger kvar. Därmed är alla drag inverterbara. Dragen $d_1^{-1} d_2^{-1} \dots d_{n-1}^{-1} d_n^{-1}$ (från höger till vänster) kommer då att återställa den ursprungliga kvadraten. Men då kommer samma dragföljd, $d_1^{-1} d_2^{-1} \dots d_{n-1}^{-1} d_n^{-1}$, tillämpad på den ursprungliga kvadraten att åstadkomma en kvadrat med sidlängd $\frac{1}{k} < 1$, vilket är omöjligt. Man kan alltså inte genom ett antal drag skapa en kvadrat med annan sidlängd än den givna kvadratens.

4. Ge exempel på en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som uppfyller

$$0 < f(x) < f(x + f(x)) < \sqrt{2}\, x, \qquad \text{för alla positiva } x,$$

samt visa att det inte finns någon funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som uppfyller

$$x < f(x + f(x)) < \sqrt{2}\, f(x), \qquad \text{för alla positiva } x.$$

Lösning. För att hitta ett exempel på funktion f som satisfierar den första olikhetskedjan, sätt $f(x) = ax$; vi söker a så att

$$0 < ax < a(x + ax) < \sqrt{2}\, x, \qquad \text{för alla positiva } x.$$

Det räcker att välja a så att $a > 0$ och $a + a^2 < \sqrt{2}$, till exempel $a = \frac{1}{2}$.
Antag att det finns en funktion f som satisfierar den andra olikhetskedjan. Den uppfyller då $f(x) > \frac{1}{\sqrt{2}} x > 0$, för alla positiva x. Då gäller även $x + f(x) > 0$ för alla $x > 0$, och följaktligen $\sqrt{2}\, f(x) > f(x + f(x)) > \frac{1}{\sqrt{2}} x + \frac{1}{\sqrt{2}} f(x)$, så att $2f(x) > x + f(x)$ och därmed gäller $f(x) > x$, för alla $x > 0$. Från de givna olikheterna får vi nu $\sqrt{2}\, f(x) > f(x + f(x)) > x + f(x)$, för alla $x > 0$, så att $f(x) > \frac{1}{\sqrt{2} - 1} x = (\sqrt{2} + 1)\, x$, och därmed $\sqrt{2}\, f(x) > f(x + f(x)) > (\sqrt{2} + 1)\, x + (\sqrt{2} + 1)\, f(x)$, för alla positiva x, vilket är omöjligt.

5. Låt n vara ett positivt heltal som är kongruent med 1 modulo 4. Xantippa har en säck med $n + 1$ bollar numrerade från 0 till n. Hon drar en boll (slumpmässigt, likafördelat) ur säcken och läser av dess nummer: k, säg. Hon behåller bollen och plockar sedan upp ytterligare k bollar ur säcken (slumpmässigt, likafördelat, utan återläggning). Slutligen summerar hon talen på alla de $k + 1$ bollarna hon plockat upp. Vad är sannolikheten att summan blir udda?

Lösning. Låt $\langle n \rangle = \{0, 1, \dots, n\}$ och säg att $X \subseteq \langle n \rangle$ är ett k-*val* om $|X| = k + 1$ och om X är en möjlig mängd av bollnummer som Xantippa kan dra, det vill säga om $k \in X$. Fixera nu $k \in \langle n \rangle$. Notera att alla k-val är lika sannolika och vidare att varje fixt k-val är lika sannolikt som varje fixt $(n - k)$-val. Vi ska nu visa att antalet k-val med udda summa är lika stort som antalet $(n - k)$-val med jämn summa (och därmed vice versa); ur detta följer att den sökta sannolikheten är $\frac{1}{2}$.
Låt X vara ett k-val och beteckna $X \setminus \{k\} = \{x_1, \dots, x_k\}$. Betrakta mängden $f_k(X) = \langle n \rangle \setminus \{n - x_1, \dots, n - x_k\}$. Notera nu att $f_k(X)$ är ett $(n - k)$-val och att $f_{n-k}(f_k(X)) = X$.

Alltså är f_k en bijektion från mängden av k-val till mängden av $(n-k)$-val (med f_{n-k} som invers). Observera att

$$\sum_{i\in f_k(X)} i = \sum_{i\in\langle n\rangle} i - \sum_{i\in X\setminus k} (n-i) = \binom{n+1}{2} - k(n+1) + \sum_{i\in X} i.$$

Eftersom n är kongruent med 1 modulo 4 gäller $n = 4m+1$ för något icke-negativt heltal m, så att $\binom{n+1}{2} = \frac{n(n+1)}{2} = (4m+1)(2m+1)$ är udda, medan $k(n+1)$ är jämnt. Därmed har $f_k(X)$ och X summor med olika paritet och det följer att den sökta sannolikheten är $\frac{1}{2}$.

6. Hitta det största positiva heltalet som inte kan skrivas på formen $a+bc$ för några positiva heltal a, b, c, som uppfyller $a<b<c$.

Lösning. Det minsta talet som kan skrivas på den formen är $1+2\cdot 3 = 7$. Notera att alla udda tal större än 7 går att skriva på den formen. Samma sak gäller alla tal som ger rest 1 eller 2 vid division med 3 och som är större än eller lika med 13. Tal som är större än 13 och som inte kan skrivas på den önskade formen måste alltså vara jämna och delbara med 3.
Om det positiva heltalet $n>7$ är en kvadrat så kan det skrivas som

$$n = k^2 = 1 + (k^2-1) = 1 + (k-1)(k+1), \quad 1 < k-1 < k+1.$$

Alla kvadrater större än eller lika med 9 kan alltså framställas på det beskrivna sättet.
Låt nu $n = (k-1)^2 + r$, där $k>2$ och $0<r<2(k-1)+1 = 2k-1$, $n \geq 7$. Vi kan då skriva

$$n = k^2 - 2k + 1 + r = (r+1) + (k-2)k.$$

För $r < k-3$ är detta en framställning av den beskrivna typen. Låt därför $r \geq k-3$ och sätt $r = (k-1)+l$. Av $k-3 \leq r < 2k-1$ följer att $-2 \leq l \leq k-1$. Vi har

$$n = (k-1)^2 + (k-1) + l = l + (k-1)(k-1+1) = l + (k-1)k.$$

För $0 < l < k-1$ är det en framställning av den beskrivna typen. Det återstår att undersöka fallen $l = -2; -1; 0$ samt $l = k-1$. Vi har ("kvar att kolla" syftar på tal större än 7 som eventuellt saknar den önskade framställningen)

$$\begin{aligned}
l = 0: &\quad n = k^2 - k = 2 + (k-2)(k+1), \text{ fungerar för } k \geq 5; \text{kvar att kolla } n = 12;\\
l = -1: &\quad n = k^2 - k - 1 = 1 + (k-2)(k+1), \text{ fungerar för } k \geq 4;\\
l = -2: &\quad n = k^2 - k - 2 = 4 + (k-3)(k+2), \text{ fungerar för } k \geq 8;\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{kvar att kolla } n = 10; 18; 28; 40.
\end{aligned}$$

Notera att både 28 och 40 ger rest 1 vid division med 3 och därför inte kommer ifråga.
För $l = k-1$ får vi att jämna positiva heltal som kan skrivas som

$$n = (k-1)^2 + (k-1) + (k-1) = k^2 - 1, \quad k > 2,$$

eventuellt kommer att sakna en framställning av den önskade typen. Vi kan skriva

$$k^2 - 1 = (k^2-4) + 3 = 3 + (k-2)(k+2),$$

vilket för $k > 5$ framställer talet n på det beskrivna sättet. Det betyder att om det finns positiva heltal större än 6 som saknar en sådan framställning så finns de bland

$$10, \qquad 12, \qquad 18, \qquad 3^2 - 1 = 8, \qquad 5^2 - 1 = 24.$$

Vi ska visa att det sökta talet är 24.

Antag att $24 = a + bc$, där $a < b < c$. Då har vi $b^2 < bc < 25$, så att $b < 5$ och $b = 2,\ 3$ eller 4. Det är omöjligt att ha $b = 4$, eftersom a då skulle behöva vara delbart med 4, vilket är omöjligt för $0 < a < 4$. På samma sätt ser vi att b inte kan vara 3. För $b = 2$ måste $a = 1$, vilket inte fungerar för att talet skulle bli udda och 24 är jämnt.

Talet 24 är alltså det största positiva heltalet som inte kan skrivas på formen $a + bc$ för några positiva heltal $a < b < c$.