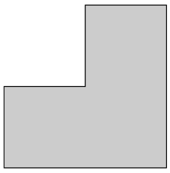
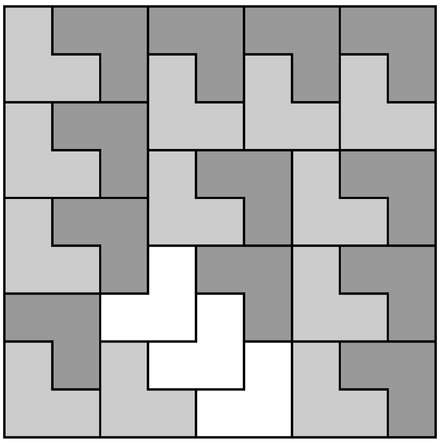
SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Göteborg den 19 november 2022

1. Vilka storlekar av kvadrater med heltalssidor kan täckas helt utan överlapp av likadana kakelplattor som består av tre kvadrater med sidan 1 som sitter ihop i en L-form?



Lösning. Det krävs att antalet rutor är delbart med tre, vilket utesluter alla kvadrater vars sida inte är delbar med tre. En kvadrat med sidan tre kan inte täckas eftersom det behövs precis tre bitar och varje bit kan täcka högst ett av de fyra hörnen. En kvadrat med sidan sex kan vi täcka genom att bygga sex rektanglar med sidorna två och tre med två plattor. Därmed kan vi också bygga alla kvadrater som har sida som är en multipel av sex genom att täcka dem med likadana kvadrater med sidan sex. Det återstår att se på udda multipler av tre. Den första är nio. Vi kan täcka den med exempelvis



En udda multipel av tre som är större än nio kan skrivas som $9 + 6n$ för något n. Eftersom vi kan täcka en rektangel med sidan 9 och $6n$ med rektanglar med sidorna två och tre kan vi nu täcka alla kvadrater vars sida är udda multipler av tre utom just tre. Sammantaget kan vi täcka precis de kvadrater vars sida är $3n$ där $n > 1$.

2. Finn alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sådana att

$$f(x + zf(y)) = f(x) + zf(y),$$

för alla $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Lösning. För $x = 0$ får vi $f(zf(y)) = zf(y) + f(0)$. Antingen är $f \equiv 0$ (det vill säga $f(x) = 0$ för alla x), eller så finns $y_0 \in \mathbb{R}$ sådant att $f(y_0) \neq 0$. Antag att det finns ett sådant y_0. Om t är ett godtyckligt reellt tal kan vi då hitta z_t så att $z_t f(y_0) = t$ och därmed så att $f(t) = t + f(0)$. Alla lösningar som inte är identiskt lika med 0 har alltså formen $f(t) = t + C$, för något reellt C.

Insättning visar att alla funktioner $f(t) = t + C$, för något reellt C, är lösningar, samt att $f \equiv 0$ är en lösning. Därmed har vi funnit alla lösningar.

3. Låt n vara ett positivt heltal som är delbart med 39. Vilken är den minsta möjliga siffersumma som n kan ha (i bas 10)?

Lösning. Ett tal n är delbart med 39 om och endast om det är delbart med 3 och 13. Det betyder att om talet n är delbart med 39 så måste dess siffersumma vara minst 3. Vi kommer att visa att det finns ett tal delbart med 13 vars siffersumma är 3. Talets siffror kommer att vara tre ettor och ett antal nollor.

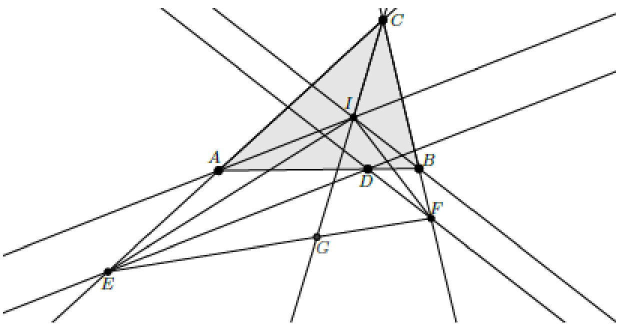
Det är lätt att beräkna potenserna av 10 modulo 13 och få att

$$\begin{array}{lll} 10 \equiv -3 \pmod{13}; & 10^2 \equiv 9 \equiv -4 \pmod{13}; & 10^3 \equiv 12 \equiv -1 \pmod{13}; \\ 10^4 \equiv 3 \pmod{13}; & 10^5 \equiv 4 \pmod{13}; & 10^6 \equiv 1 \pmod{13}. \end{array}$$

Det följer nu att $10^4 + 10^2 + 1 = 10101$ är delbart med 13, och därmed även med 39.

4. Låt ABC vara en spetsvinklig triangel. Låt I vara en punkt inuti triangeln och låt D vara en punkt på sträckan AB. Linjen genom D som är parallell med AI skär linjen AC i punkten E, och linjen genom D som är parallell med BI skär linjen BC i punkten F. Visa att

$$\frac{EF \cdot CI}{2} \geq \text{area}(\triangle ABC).$$



Lösning. Låt linjerna CI och EF skära varandra i G, som i figuren. Trianglarna ADI och AEI har en gemensam sida (AI) och samma höjd eftersom AI och DE är parallela. Därför har ADI och AEI samma area. På samma sätt kan vi visa att BDI och BFI har samma area. Det följer att

$$\begin{aligned} \text{area}(ABC) &= \text{area}(ACI) + \text{area}(BCI) + \text{area}(ADI) + \text{area}(BDI) \\ &= \text{area}(ACI) + \text{area}(BCI) + \text{area}(AEI) + \text{area}(BFI) \\ &= \text{area}(CEI) + \text{area}(CFI). \end{aligned}$$

Höjden i triangeln CEI med avseende på CI är avståndet mellan E och linjen CI, vilket är mindre än eller lika med EG. Därför gäller area$(CEI) \leq \frac{CI \cdot EG}{2}$. På samma sätt får vi area$(CFI) \leq \frac{CI \cdot FG}{2}$, och det följer att

$$\text{area}(ABC) \leq \frac{CI \cdot EG}{2} + \frac{CI \cdot FG}{2} = \frac{CI \cdot (EG + FG)}{2} = \frac{CI \cdot EF}{2}.$$

5. Visa att det för varje par av positiva heltal k och n finns heltal $x_1, x_2, \ldots, x_k$ med $0 \leq x_j \leq 2^{k-1} \cdot \sqrt[k]{n}$ för $j = 1, 2 \ldots, k$, och sådana att

$$x_1 + x_2^2 + x_3^3 + \cdots + x_k^k = n.$$

Lösning. Vi bevisar påståendet med induktion över k. Det är trivialt om $k = 1$. För induktionssteget låter vi x_k vara det största heltal som är mindre än eller lika med $\sqrt[k]{n}$. Observera att

$$\begin{aligned}
n - x_k^k &= (\sqrt[k]{n})^k - x_k^k \\
&= (\sqrt[k]{n} - x_k)\Big(\sqrt[k]{n}^{k-1} + \sqrt[k]{n}^{k-2} x_k + \cdots + x_k^{k-1}\Big) \\
&\leq 1 \cdot \left(\binom{k-1}{0}\sqrt[k]{n}^{k-1} + \binom{k-1}{1}\sqrt[k]{n}^{k-2} x_k + \cdots + \binom{k-1}{k-1} x_k^{k-1}\right) \\
&= \big(\sqrt[k]{n} + x_k\big)^{k-1} \\
&\leq (2\sqrt[k]{n})^{k-1} \\
&= 2^{k-1} n^{(k-1)/k}.
\end{aligned}$$

Enligt induktionshypotesen kan vi välja heltal $x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}$ så att $x_1 + x_2^2 + \cdots + x_{k-1}^{k-1} = n - x_k^k$ och $0 \leq x_j \leq 2^{k-2} \sqrt[k-1]{n - x_k^k} \leq 2^{k-2} \sqrt[k-1]{2^{k-1} n^{(k-1)/k}} = 2^{k-1} \sqrt[k]{n}$ $(1 \leq j \leq k-1)$. Dessutom gäller $x_k \leq \sqrt[k]{n} \leq 2^{k-1} \sqrt[k]{n}$. Påståendet har därför bevisats.

6. Bengt vill sätta ut kryss och ringar i rutorna i en $n \times n$-kvadrat, så att det är exakt en ring och exakt ett kryss i varje rad och i varje kolumn, och inte mer än en symbol i varje ruta. Mona vill stoppa honom, genom att på förhand sätta ut ett antal förbud mot kryss och ett antal förbud mot ring, högst ett förbud i varje ruta. Hon vill använda så få förbud som möjligt av varje sort. För att lyckas hindra Bengt, hur många förbud behöver hon som minst använda av den sorts förbud hon använder flest av?

Lösning. Mona behöver använda minst $n - 1$ förbud av den sort hon använder flest av. Ett sätt att sätta ut förbuden är då att sätta kryssförbud i rutorna $(1, i)$ för $i = 2, \ldots, n$, och ringförbud i rutorna $(j, 1)$ för $j = 2, \ldots, n$. Då skulle Bengt behöva sätta både en ring och ett kryss i ruta $(1, 1)$, vilket är otillåtet.

Om Mona å andra sidan använder högst $n - 2$ förbud av varje sort, så kan Bengt faktiskt alltid placera ut sina ringar och kryss enligt önskemål, vilket vi nu ska visa. Notera att när Bengt sätter ut ringar, så fungerar en utplacerad ring som ett förbud mot ett kryss, eftersom han bara får använda en symbol per ruta.

Bengt börjar med kryssen, och ordnar raderna så att han börjar med den rad som har flest kryssförbud. I den raden finns det högst $n - 2$ kryssförbud, så det finns plats att sätta ut ett kryss. I nästa rad finns det återigen högst $n - 2$ otillgängliga rutor (högst $n - 3$ 'riktiga' kryssförbud, och en spalt där han redan satt ut ett kryss), så det finns plats att sätta ut ett kryss. På samma sätt kan han gå vidare och placera ut alla sina kryss (alltid minst en tillgänglig ruta). Notera att de två sista raderna inte kan innehålla några 'riktiga' kryssförbud.

Bengt gör sedan på liknande sätt med ringarna, och ordnar raderna efter hur många 'riktiga' ringförbud de innehåller. Han måste nu också räkna med de 'förbud' som följer av att han redan satt kryss i vissa rutor. Första raden innehåller högst $n-2$ 'riktiga' ringförbud, och ett kryss, så maximalt $n-1$ otillgängliga rutor. Alltså går det att sätta ut en ring i den raden. I rad 2 är det maximalt $n-3$ 'riktiga' ringförbud, ett kryss, och en spalt där han eventuellt inte kan sätta en ring på grund av ringen i föregående rad. Totalt är det alltså som mest $n-1$ otillgängliga rutor i rad 2. I sista raden skulle det kunna vara så att det i den enda kvarvarande rutan ($n-1$ spalter är upptagna av andra ringar) redan sitter ett kryss.

Notera dock att det i de två sista raderna inte finns några 'riktiga' ringförbud. Därför kan vi flytta om ringarna i de två sista raderna. Vi betraktar snittet mellan de två sista raderna, och de två sista kvarvarande tillgängliga spalterna, (som alltså inte innehåller några tidigare utplacerade ringar). Vi skulle kunna ha situationen (eventuella kryssförbud märks inte ut):

	$\circ$
$\times$	

Vi kan då ändra den näst sista ringen, och få följande lösning. Notera att det inte kan sitta ett kryss i vägen i rutan ovanför krysset i sista raden, eftersom det bara är exakt ett kryss i varje spalt.

$\circ$	
$\times$	$\circ$

Alternativ lösning. Ett annat sätt att visa att $n-2$ förbud av varje sort inte räcker är följande. Bengt numrerar diagonalerna i kvadraten cykliskt på följande sätt:

1	2	3	4	...
n	1	2	3	...
$n-1$	n	1	2	...
⋮	⋮	⋮	⋮	

Varje ring/kryssförbud kan bara stoppa en diagonal var, så om det bara är $n-2$ förbud av varje sort finns det två diagonaler utan ringförbud, och två diagonaler utan kryssförbud. Därför finns det alltså två diagonaler där Bengt kan sätta ut kryssen, och två diagonaler där han kan sätta ut ringarna. Han kan alltså då välja en diagonal till vardera symbol på sådant sätt att dessa är två olika diagonaler.