SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Lund den 18 november 2023

1. Anna och Lisa gör en cykeltur. Annas cykel går sönder 30 kilometer före deras slutmål. De två bestämmer sig för att slutföra turen med Lisas cykel på följande sätt: I början cyklar Anna och Lisa går. Vid någon tidpunkt kliver Anna av cykeln, parkerar den vid vägen och fortsätter till fots. När Lisa kommer fram till cykeln tar hon den och cyklar tills hon kommer ifatt Anna. Efter det upprepar de samma procedur.

Vi vet inte hur många gånger proceduren upprepas, men de kommer fram till slutmålet samtidigt. Anna går med farten 4 km/h och cyklar med farten 15 km/h. Lisa går med 5 km/h och cyklar med 20 km/h. Hur lång tid tar det för dem att ta sig över de sista 30 km av vägen? (Försumma tiden det tar att parkera, låsa, låsa upp cykeln, etc.)

Lösning. Låt t vara tiden (i timmar) Anna cyklar till hon stannar första gången. På den tiden flyttar hon sig $15t$ kilometer fram och Lisa flyttar sig $5t$ km fram. För att komma till cykeln måste Lisa gå ytterligare $10t$ km, vilket kommer att ta $2t$ timmar för henne. Under den tiden hinner Anna gå $8t$ km. Det betyder att Lisa når cykeln $3t$ timmar efter start, och cykeln är då på avstånd $15t$ från startpunkten. Vid det ögonblicket är Anna $8t$ km före Lisa.

Låt s vara tiden det tar för Lisa att hinna ikapp Anna efter att hon börjat cykla. Det är uppenbart att s satisfierar ekvationen

$$20s = 8t + 4s.$$

Således gäller $s = \frac{t}{2}$. Under den tiden flyttar sig Lisa $10t$ km fram. Tiden det tar för Lisa att hinna ikapp Anna är $\frac{7}{2}t$, och under den tiden flyttar de sig $25t$ km fram. Deras medelhastighet mellan två träffar är alltså $\frac{50}{7}$ km/h, och den hastigheten är oberoende av tiden t Anna väljer att cykla (så länge hon inte cyklar för länge, vilket skulle göra det omöjligt att hinna fram till målet samtidigt). Det har alltså ingen betydelse hur lång tid Anna cyklar, och inte heller hur många gånger proceduren upprepas. Om Anna och Lisa kommer fram till sitt mål samtidigt betyder det att de förflyttade sig med medelhastigheten $\frac{50}{7}$ km/h. Tiden det tog för dem är därmed $\frac{30}{\frac{50}{7}} = \frac{21}{5}$ timmar, eller fyra timmar och tolv minuter.

2. Ett triangulärt koloniområde är indelat i fyra fält av varierande storlek som figuren nedan visar. Det enda vi för övrigt vet är att sträckorna AF, FD, BF och FE har längderna 5, 2, 4 respektive 2 (i 10-tals m). När lotterna fördelas får Joar välja först. Vilken lott ska han välja för att få den med störst area?

Lösning 1. Låt triangeln ABF ha arean S_t. Triangeln AFE har då arean $\frac{S_t}{2}$ medan triangeln BDF har arean $\frac{2S_t}{5}$. Vi jämför trianglar med samma höjd men med varierande bas. För att bestämma arean av fyrhörningen $EFDC$ drar vi först sträckan DE. Triangeln DEF har hälften så stor area som $\triangle BDF$ eller $\frac{S_t}{5}$. Låt W vara arean av $\triangle DCE$. Förhållandet mellan areorna av trianglarna ABD och ADC är lika med förhållandet mellan areorna för trianglarna BDE och

DCE, vilket ger $\frac{S_t+\frac{2S_t}{5}}{\frac{S_t}{2}+\frac{S_t}{5}+W} = \frac{\frac{3S_t}{5}}{W}$, $7W = \frac{21S_t}{10} + 3W$ och $W = \frac{21S_t}{40}$. Arean av fyrhörningen $EFDC$ är således $W + \frac{S_t}{5} = \frac{29S_t}{40}$, dvs det sökta förhållandet är $40 : 29$. Triangeln är alltså klart större.

Lösning 2. Beteckna med h_1 avståndet från punkten A till linjen BE, med h_2 avståndet från C till linjen BE, med h_3 avståndet från B till linjen AD, och slutligen med h_4 avståndet från C till linjen AD. Låt S_t vara arean av triangel ABF och låt S_q vara arean av fyrhörningen $DCEF$. Drag diagonalen CF i fyrhörningen. Vi har

$$2S_t = 4h_1 = 5h_3 \quad \text{och} \quad 2S_q = 2h_2 + 2h_4.$$

Vi kommer nu att härleda några fler samband mellan $h_1,\ h_2,\ h_3,\ h_4$ genom att beräkna (de dubbla) areorna för några trianglar på olika sätt.

$$\triangle AFC: \quad 5h_4 = 2h_1 + 2h_2; \qquad \triangle BFC: \quad 4h_2 = 2h_3 + 2h_4.$$

Ur de två senaste likheterna får vi att $5h_4 - 2h_1 = h_3 + h_4$, så att $8h_4 = 2h_3 + 4h_1 = 7h_3$ (eftersom $2S_t = 4h_1 = 5h_3$). För fyrhörningens area får vi nu

$$2S_q = 2h_2 + 2h_4 = 5h_4 - 2h_1 + 2h_4 = 7h_4 - 2h_1 = \frac{49}{8}h_3 - 2h_1 = \frac{49}{8}h_3 - \frac{5}{2}h_3 = \frac{29}{8}h_3 < 5h_3,$$

alltså har triangeln ABF större area än fyrhörningen $DCEF$.

3. Låt n vara ett positivt heltal och låt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vara olika reella tal, placerade efter varandra i någon ordning. Vi säger att vi har ett *lokalt minimum* i ett av talen om detta är mindre än båda sina grannar.

Vilket är det genomsnittliga antalet lokala minima över alla möjliga sätt att ordna talen efter varandra?

Lösning 1. Lokala maxima kan definieras på motsvarande sätt. I de yttersta positionerna kan det aldrig uppstå en lokal max- eller minpunkt enligt definitionen. Övriga positioner kommer att vara maxpunkter i en tredjedel av fallen, minpunkter i en tredjedel av fallen och varken max- eller minpunkter i en tredjedel av fallen. Vi ser detta genom att fokusera på tre konsekutiva positioner. Det spelar ingen roll vilka tal som står på övriga positioner och det finns 6 sätt att ordna de tre talen. I två av dem får vi en lokal maxpunkt, i två en lokal minpunkt och i två varken det ena eller det andra. Det genomsnittliga antalet minima är alltså $\frac{n-2}{3}$.

Lösning 2. Vi kan anta att $a_i = i$ för $i = 1, \ldots, n$. För varje $i = 2, \ldots, n-1$ och varje $j = 1, \ldots, n$ beräknar vi antalet permutationer som har lokalt minimum j på plats i. Om en permutation har j på plats i, som är ett lokalt minimum, så finns det $(n-j)(n-j-1)$ möjligheter att fylla upp platserna $i-1$ och $i+1$, och $(n-3)!$ möjligheter för resten av permutationen. Det finns alltså $(n-3)! \cdot (n-j)(n-j-1)$ permutationer som har lokalminimum j på plats i. För att beräkna det totala antalet lokala minima multiplicerar vi med $(n-2)$ och summerar med j som går från 1 till n. Vi får

$$2(n-2)(n-3)!\left(\binom{n-1}{2} + \binom{n-2}{2} + \cdots + \binom{1}{2} + \binom{0}{2}\right) = 2(n-2)!\binom{n}{3} = n! \cdot \frac{n-2}{3}.$$

För att finna genomsnittet dividerar vi med $n!$ och får svaret $\frac{n-2}{3}$.

4. Låt f vara en funktion som till varje par av positiva heltal (x, y) kopplar ett positivt heltal $f(x, y)$. Antag att $f(x, y) \leq xy$ för alla positiva heltal x, y. Visa att det finns 2023 olika par $(x_1, y_1), \ldots (x_{2023}, y_{2023})$ sådana att

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) = \cdots = f(x_{2023}, y_{2023}).$$

Lösning. Vi ska visa att det för varje positivt heltal k finns k olika par (x_i, y_i) sådana att f har samma värde i dessa par.

Låt N vara ett positivt heltal. Låt oss uppskatta antalet par positiva heltal (x, y) sådana att $xy \leq N$. För ett fixt x, $1 \leq x \leq N$, finns det $\left\lfloor \frac{N}{x} \right\rfloor$ värden för y sådana att $xy \leq N$. Det betyder att det totala antalet par positiva heltal (x, y) som satisfierar $xy \leq N$ är

$$N + \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{N}{N} \right\rfloor \geq (N-1) + \left(\frac{N}{2} - 1\right) + \cdots \left(\frac{N}{N} - 1\right) = N\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}\right).$$

Det följer nu att det för varje N finns åtminstone $N\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N}\right)$ par (x, y) sådana att $f(x, y) \leq N$. Dirichlets lådprincip säger nu att man för varje positivt heltal N kan hitta åtminstone $\left\lfloor \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} \right\rfloor$ par (x, y) sådana att f antar samma värde i dessa par. För att avsluta återstår att notera att det för varje positivt heltal k finns ett positivt heltal N sådant att

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} \geq k.$$

Detta följer av att

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{N} + \cdots \to \infty \quad \text{när} \quad N \to \infty,$$

vilket är ett välkänt faktum.

5.(a) Låt x och y vara heltal. Visa att $x = y$ om $x^n \equiv y^n \mod n$ för alla positiva heltal n.

(b) För vilka par av heltal (x, y) finns det oändligt många positiva heltal n sådana att $x^n \equiv y^n \mod n$?

Lösning.(a) Låt p vara ett godtyckligt primtal. Enligt Fermats lilla sats gäller att $x \equiv x^p \equiv y^p \equiv y$ och därför måste p dela $x - y$. Det följer att $x - y = 0$ och $x = y$.

(b) Om $x = y$ gäller $x^n \equiv y^n \bmod n$ för alla n. Antag att $|x - y| > 1$ och låt q vara ett primtal som delar $x - y$, så att $y = x + kq$. I detta fall påstår vi att $n = q^s$, $s \in \mathbb{N}$, beskriver oändligt många n med den önskade egenskapen. Vi visar det genom att visa att alla termer bortsett från den första i

$$(x + kq)^{q^s} = x^{q^s} + q^s x^{q^s - 1} kq + \cdots + \binom{q^s}{m} x^{q^s - m} k^m q^m + \cdots + (kq)^{q^s}$$

är delbara med q^s. Det följer av att $\binom{q^s}{m} q^m$, $m = 1, \ldots, q^s - 1$, är delbart med q^s, vilket vi nu visar. Att talet inte är delbart med q^s skulle betyda att nämnaren $m!$ är delbar med åtminstone q^{m+1}. Detta är dock omöjligt då en övre gräns för antalet gånger q delar $m!$ ges av

$$\left\lfloor \frac{m}{q} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{q^2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{q^3} \right\rfloor + \cdots \leq m\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots\right) \leq \frac{m}{q-1} < m + 1.$$

Antag nu att $|x - y| = 1$. Vi kan per symmetri anta att $y = x + 1$. Givet ett naturligt tal $n > 1$, låt p vara det minsta primtalet som delar n. Räknar vi modulo p kan vi dela upp i två fall:

- p delar antingen x eller $y = x + 1$: I detta fall kan x^n och $(x + 1)^n$ inte vara kongruenta mod p och därför inte heller mod n.
- p delar varken x eller $y = x + 1$: Det följer att $p > 2$. Eftersom p är ett primtal finns en primitiv rot g mod p som genererar alla restklasser $\neq 0$ mod p. Vi kan därmed skriva

  $$x \equiv g^a \qquad \text{och} \qquad x + 1 \equiv g^b$$

  båda mod p, för heltal $1 \leq a \leq p - 1$ och $1 \leq b \leq p - 1$, där $a \neq b$. Antagandet om att p är det minsta primtalet som delar n visar att $p - 1$ och n är relativt prima och därför är

  $$x^n \equiv g^{an} \qquad \text{och} \qquad (x + 1)^n \equiv g^{bn}$$

  inte kongruenta mod p då an inte är kongruent med bn mod $p - 1$ (n är inverterbar).

Det följer att det för dessa (x, y) inte finns några $n > 1$ sådana att likheten gäller.

Alla par (x, y) med den önskade egenskapen är alltså alla par (x, y) sådana att $|x - y| \neq 1$.

6. Visa att varje rationellt tal x i intervallet $(0, 1)$ kan skrivas som en ändlig summa av olika bråk av typen $\frac{1}{k(k+1)}$, det vill säga olika element i följden $\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \ldots$.

Lösning. Vi visar först att $x = \frac{p}{q}$ kan skrivas som

$$x = \frac{p}{q} = \frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} - \cdots \pm \frac{1}{n_k},$$

där $n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k$ är positiva heltal. Vi visar detta med hjälp av induktion med avseende på p. Påståendet är trivialt om $p = 1$. Annars väljer vi n_1 så att

$$\frac{1}{n_1 + 1} < x < \frac{1}{n_1}.$$

Observera att

$$\frac{1}{n_1} - x = \frac{q - pn_1}{qn_1},$$

och olikheterna ovan implicerar att $p(n_1 + 1) - q > 0$, det vill säga $p > q - pn_1$. Enligt induktionsantagandet kan $\frac{1}{n_1} - x = \frac{q - pn_1}{qn_1}$ skrivas som

$$\frac{1}{n_1} - x = \frac{1}{n_2} - \frac{1}{n_3} + \cdots \mp \frac{1}{n_k}.$$

Den vänstra olikheten för x och n_1 ger att $n_1 < n_2$, och påståendet följer. Nu använder vi att

$$\frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$
$$= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n}.$$

Om k är jämnt:

$$x = \frac{1}{n_1(n_1+1)} + \cdots + \frac{1}{(n_2-1)n_2} + \frac{1}{n_3(n_3+1)} + \cdots + \frac{1}{(n_4-1)n_4}$$
$$+ \cdots + \frac{1}{n_{k-1}(n_{k-1}+1)} + \cdots + \frac{1}{(n_k-1)n_k}.$$

Om k är udda kan vi ersätta $\frac{1}{n_k}$ med $\frac{1}{n_k - 1} - \frac{1}{n_k(n_k - 1)}$ och använda samma formel.