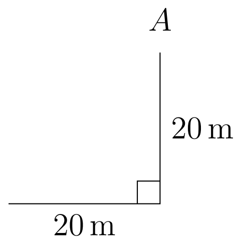
SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Lund den 19 november 2016

1. I en trädgård finns ett L-format staket, se figur. Till sitt förfogande har man dessutom två färdiga raka staketsektioner som är 13 m respektive 14 m långa. Från punkten A vill man avgränsa en del av trädgården med area minst 200 m^2. Går det att göra?



Lösning. Ja, man kan till exempel bygga det som i figuren nedan. Välj sträckan x sådan att $x^2 + 20^2 < 27^2$ för att uppfylla triangelolikheten. Ta till exempel $x = 15$ för att underlätta beräkningarna. (Det optimala valet av x är ungefär 15.83.)

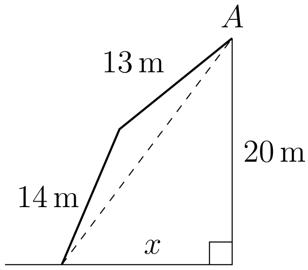
Då blir den streckade sträckan 25 m och arean av den lilla triangeln (med Herons formel)

$$A_T = \sqrt{26 \cdot 1 \cdot 13 \cdot 12} = 26\sqrt{6}$$

Den totala avgränsade arean är således $A = 150 + 26\sqrt{6}$. Frågan är om $26\sqrt{6} > 50$, men eftersom

$$\left(\frac{50}{26}\right)^2 = \left(\frac{25}{13}\right)^2 = \frac{625}{169} < \frac{1029}{169} = 6$$

så är det sant.



2. Avgör om olikheten

$$|\sqrt{x^2 + 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 4x + 8}| < 3$$

gäller för alla reella tal x.

Lösning 1. Vi observerar att

$$\left|\sqrt{x^2 + 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 4x + 8}\right| = \left|\sqrt{(x+1)^2 + 2^2} - \sqrt{(x-2)^2 + 2^2}\right|,$$

vilket kan tolkas som absolutbeloppet av skillnaden mellan avståndet mellan $(-1,0)$ och $(x,2)$ och avståndet mellan $(2,0)$ och $(x,2)$. Enligt triangelolikheten är summan av två sidors längder i en icke-degenererad triangel alltid strikt större än den tredje sidans längd. Avståndet mellan $(-1,0)$ och $(2,0)$ är 3, och det följer att olikheten gäller för alla reella x.

Lösning 2. (skiss) Förlängning med vänsterledets konjugat (> 0) ger den ekvivalenta olikheten

$$|2x-1| < \sqrt{x^2+2x+5} + \sqrt{x^2-4x+8}\,.$$

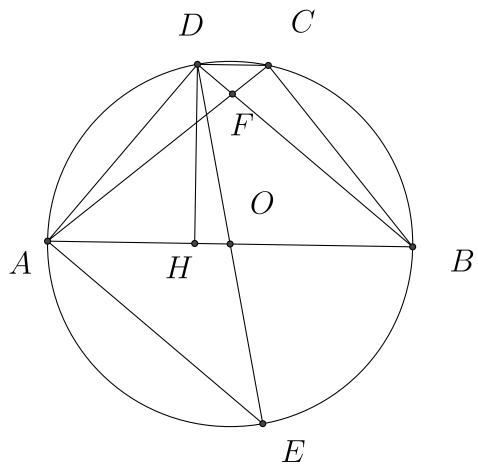
Efter kvadrering (båda leden är icke-negativa) och omflyttning av termer får vi

$$x^2 - x - 6 < \sqrt{(x^2+2x+5)(x^2-4x+8)}\,.$$

Vi ska undersöka olikheten $|x^2-x-6| < \sqrt{(x^2+2x+5)(x^2-4x+8)}$, som, om den visar sig gälla, kommer att implicera den ursprungliga olikheten. Kvadrering, omflyttning av termer och förkortning med 4 ger den ekvivalenta olikheten $(2x-1)^2 > 0$. Den är sann för alla reella $x \neq \frac{1}{2}$, och implicerar därmed den ursprungliga olikheten för alla reella $x \neq \frac{1}{2}$. Direkt insättning ger att den givna olikheten stämmer även för $x = \frac{1}{2}$ $(0 < 3)$, och vi har därmed visat påståendet.

3. Fyrhörningen $ABCD$ är ett parallelltrapets, där $AB \| CD$. Trapetset är inskrivet i en cirkel med radie R och medelpunkt på sidan AB. Punkten E ligger på den omskrivna cirkeln och är sådan att $\angle DAE = 90°$. Givet att $\frac{AE}{AB} = \frac{3}{4}$, beräkna längden av parallelltrapetsets sidor.

Lösning 1. Av randvinkelsatsen och alternatvinklars likhet följer att parallelltrapetset är likbent.



Vinklarna ADB och ACB är räta, eftersom de står på en diameter. Då gäller att $AE \| BD$, och $\angle EAB = \angle ABD$, och vi får att trianglarna ABE och BAD är kongruenta. Det medför att $AE = BD\,(= AC)$. Beteckna diagonalernas skärningspunkt med F. Trianglarna ABF och CDF är likformiga enligt topptriangelsatsen, och vi får

$$\frac{CD}{AB} = \frac{DF}{BF} = \frac{BD-BF}{BF} = \frac{AE-BF}{BF}.$$

Trianglarna AEO och ABF är också likformiga, enligt det tredje likformighetsfallet (vinkel – vinkel), så att

$$\frac{AE}{AB} = \frac{AE}{2R} = \frac{OE}{BF} = \frac{R}{BF} = \frac{3}{4}.$$

Vi får att $AE = \frac{3R}{2}$, $BF = \frac{4R}{3}$, och därmed att $CD = \frac{R}{4}$. Benens längd kan nu beräknas med Pythagoras sats, $AD = BC = \frac{R\sqrt{7}}{2}$.

Lösning 2. Vi noterar återigen att parallelltrapetset är likbent, samt att $AE = \frac{3R}{2}$. Ur den rätvinkliga triangeln DEA får vi, med hjälp av Pythagoras sats, att $AD = BC = \frac{R\sqrt{7}}{2}$. Som tidigare får vi att $BD = AE$. Beteckna med DH är höjden mot hypotenusan i $\triangle ABD$. Då gäller att $DH \cdot AB = BD \cdot AD$, vilket ger $DH = \frac{3R\sqrt{7}}{8}$. Av symmetriskäl får vi nu att $2AH = AB - CD = 2\sqrt{AD^2 - DH^2} = \frac{7R}{4}$, och det ger längden av den återstående sidan, $CD = 2R - \frac{7R}{4} = \frac{R}{4}$.

4. För vilka primtal p är talet $p+1$ lika med produkten av alla de primtal som är mindre än p?

Lösning 1. Det är lätt att se att den enda lösningen med $p < 8$ är $p = 5$.

Antag nu att $p \geq 8$ är en lösning. Låt q vara ett primtal som delar $p - 2$. Därmed gäller $q < p$, och då delar q också $p + 1$. Det betyder att $q = 3$, så att $p - 2 = 3^n$. På samma sätt fås att $p - 6 = 7^m$. Detta ger $3^n = 7^m + 4$, men modulo 3 betyder detta att $0 = 1 + 1$, och vi har kommit fram till en motsägelse.

Därmed är $p = 5$ den enda lösningen.

Lösning 2. Låt q vara en udda primfaktor i $p - 1$. Då måste q även vara en faktor i $p + 1$, så att det finns heltal s, t, sådana att $sq = tq + 2$, eller $(s - t)q = 2$, vilket är omöjligt. Det betyder att $p - 1 = 2^k$, för något $k \in \mathbb{N}$, och därmed att $p = 2^k + 1$. Det är uppenbart att $p = 3$ inte är en lösning. Därför måste $p + 1$ vara ett tal, delbart med 3. Likheten $p + 1 = 2^k + 2$ modulo 3 betyder att k måste vara ett jämnt tal. Vi har nu att $p + 1 = 4(2^{k-2} + 1) - 2$. Om r är en primfaktor i $2^{k-2} + 1 < p$, så måste r dela $p+1$, och följaktligen måste r dela 2, det vill säga $r = 2$. Det betyder i sin tur att den enda möjligheten som återstår att kontrollera är $k = 2$. Direkt kontroll visar att $p = 5$ är en lösning, som alltså är den enda lösningen.

5. Peter bestämmer sig för att göra en ny multiplikationstabell för de fyra talen $1, 2, 3, 4$ på ett sådant sätt att produkten av två av dem också är ett av dem. Han vill också att $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ska gälla och att $ab \neq ac$ och $ba \neq ca$ om $b \neq c$. Peter lyckas med det. I hans nya tabell gäller att $1 \cdot 3 = 2$ och $2 \cdot 2 = 4$. Vad är produkten $3 \cdot 1$ enligt Peters tabell?

Lösning. Observera att $2 \cdot 3 \neq 4 = 2 \cdot 2$, $2 \cdot 3 \neq 2 = 1 \cdot 3$, och att

$$2 \cdot 3 = 3 \text{ medför } 4 \cdot 3 = 2 \cdot (2 \cdot 3) = 2 \cdot 3,$$

vilket är omöjligt. Därför är den enda möjligheten $2 \cdot 3 = 1$, vilket också ger $4 \cdot 3 = 2 \cdot 1$.

På samma sätt, $1 \cdot 2 \neq 4 = 2 \cdot 2, 1 \cdot 2 \neq 2 = 1 \cdot 3$ och

$$1 \cdot 2 = 1 \text{ medför } 1 \cdot 4 = (1 \cdot 2) \cdot 2 = 1 \cdot 2,$$

vilket också är omöjligt. Därför är den enda möjligheten $1 \cdot 2 = 3$, vilket också ger $1 \cdot 4 = 3 \cdot 2$.

Om $1 \cdot 1 = 1$, så blir $1 \cdot 2 = 1 \cdot 1 \cdot 2 = 1 \cdot 3$, vilket är omöjligt. Därför är $1 \cdot 1 = 4$, och $1 \cdot 4 = 1$ är den enda möjligheten. Då är $3 \cdot 2 = 1$, och $4 \cdot 2 = 2$ är den enda återstående möjligheten. Då är $2 \cdot 4 = 2$, och $2 \cdot 1 = 3$ är den enda återstående möjligheten. Nu är $3 \cdot 1 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2 \cdot 4 = 2$, och vi är klara.

6. Varje ruta i ett 13×13 rutnät är målad i svart eller vit färg. I ett drag får man välja en delkvadrat med storlek antingen 2×2 eller 9×9, och i denna delkvadrat färga alla vita rutor svarta, samt färga alla svarta rutor vita.

Är det alltid möjligt att efter ett antal sådana drag få alla rutor svarta?

Lösning 1. Vi ska visa att svaret på frågan är nej. Vi börjar med två observationer:

(i) Alla drag är kommutativa och varje drag är omvänt till sig själv.

(ii) Om man efter ett antal drag får alla rutorna svarta, och om man sedan startar med alla rutorna svarta och upprepar samma drag i omvänd ordning, så får man den ursprungliga konfigurationen.

Av observationerna ovan följer att man istället för den ursprungliga kan ställa den ekvivalenta frågan: kan man med utgångspunkt den helsvarta konfigurationen nå vilken annan konfiguration som helst, genom att genomföra dragen, beskrivna i problemformuleringen?

Det totala antalet konfigurationer är 2^{169}. Antalet 2×2 kvadrater är 144, medan antalet 9×9 kvadrater är 25. Från en helsvart konfiguration kan man därför nå till som mest $2^{144} \cdot 2^{25} = 2^{169}$ andra konfigurationer.

Vi kommer nu att visa att det finns flera sätt att välja sekvenser av drag (minst ett drag, och som innehåller varje drag högst en gång) som inte ändrar konfigurationen, för då kommer antalet konfigurationer som kan nås från den helsvarta konfigurationen vara mindre än det totala antalet konfigurationer.

Välj en 11×11 kvadrat A och gör ett drag av varje slag vid varje hörn av A. Då har varje ruta i A ändrat färg ett jämnt antal gånger. Resultatet är alltså den ursprungliga konfigurationen av A.

Därmed har vi visat att man från den svarta konfigurationen inte kan få alla möjliga konfigurationer, och därmed att det finns konfigurationer, från vilka man inte kan nå den helsvarta konfigurationen.

Lösning 2. Numrera raderna med tal från 1 till 13. Observera att varje 9×9-delkvadrat täcker 9 rutor i var och en av raderna 5, 6, 7, 8, 9. Låt A beteckna unionen av rad 6 och 7. Vi ska visa att pariteten av antalet vita rutor i A inte kan ändras av de tillåtna dragen.

Varje gång en ruta i A målas om ändras pariteten. Men om pariteten ändras ett jämnt antal gånger är den oförändrad. Vi vill därför visa att pariteten ändras ett jämnt antal gånger för varje drag, det vill säga att varje 2×2-delkvadrat och varje 9×9-delkvadrat täcker ett jämnt antal rutor i A.

En 2×2-kvadrat täcker 0 eller 2 rutor i rad 6 och 7, så den räcker 0, 2 eller 4 rutor i A. Hursomhelst täcker den ett jämnt antal rutor i A. En 9×9-kvadrat täcker 9 rutor i rad 6 och 9 i rad 7, alltså 18 totalt. Även detta är jämnt. Det innebär att pariteten av antalet vita rutor i A inte kan ändras. Särskilt förblir pariteten udda om den är udda från början (till exempel om bara rutan i mitten är vit). Men så länge pariteten är udda finns det minst en vit ruta. Därmed är det inte alltid möjligt att färga alla rutor svarta.