SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Göteborg den 22 november 2014

1. Bestäm alla polynom p med icke-negativa heltalskoefficienter sådana att $p(1) = 7$ och $p(10) = 2014$.

Lösning. Sätt $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$. Eftersom $p(1) = 7$, är summan av koefficienterna lika med 7. I synnerhet är $0 \leq a_j < 10$ för alla j. Eftersom $p(10) < 10^4$, kan polynomet ha grad högst 3, och eftersom

$$\begin{aligned} 2014 &= 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 \\ &= a_3 \cdot 10^3 + a_2 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 = p(10), \end{aligned}$$

är (den entydiga) decimalutvecklingen av 2014, måste $p(x) = 2x^3 + x + 4$.

2. Tre cirklar som tangerar varandra utvändigt har alla sina medelpunkter på en fjärde cirkel med radie R. Visa att de tre cirkelskivornas sammanlagda area är mindre än $4\pi R^2$.

Lösning. Om cirklarnas sammanlagda area är större än $3\pi R^2$ måste minst en av dem ha en area som är större än πR^2 och därmed en radie ρ som är större än R. Detta betyder att den måste täcka medelpunkten till den cirkel på vars rand den har sitt centrum. Därmed kan ingen av de andra cirklarna ha en radie som överskrider R. Om r är radien på den största av de andra två cirklarna har vi att radien ρ på den största cirkeln är högst $2R - r$ (tillämpa triangelolikheten på triangeln med sidor $R, R, \rho + r$), och den sammanlagda arean är högst

$$\pi(2R - r)^2 + \pi r^2 + \pi r^2 = 4\pi R^2 - 4\pi Rr + 3\pi r^2 = 4\pi R^2 - \pi r(4R - 3r),$$

som är mindre än $4\pi R^2$ eftersom $4R > 4r > 3r$.

3. Bestäm alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sådana att

$$f(f(x + y) - f(x - y)) = xy,$$

för alla reella x och y.

Lösning. Om vi sätter $x = y = 0$ ser vi att $f(0) = 0$. Insättning av $y = 1$ ger att $f(f(x+1) - f(x-1)) = x$, vilket visar att f måste vara surjektiv, det vill säga att f antar varje reellt tal som värde. Insättning av $x = y$ ger $f(f(2x)) = x^2$. Eftersom f är surjektiv kan vi för varje $t \in \mathbb{R}$ hitta $x = x(t) \in \mathbb{R}$ så att $f(2x) = t$. Men då gäller att $f(t) = (x(t))^2 \geq 0$ för alla reella t, vilket strider mot att f är surjektiv. Någon sådan funktion f finns alltså inte.

4. En kvadrat är sönderklippt i ändligt många trianglar på ett godtyckligt sätt. Visa att summan av diametrarna till de inskrivna cirklarna i dessa trianglar är större än kvadratens sidlängd.

Lösning. Alla trianglar har mindre omkrets än kvadratens. För att inse det drar vi linjer, parallella med kvadratens sidor, genom en triangels hörn. Triangeln har mindre omkrets än den bildade rektangeln enligt triangelolikheten och det är uppenbart att rektangeln har mindre omkrets än kvadraten.

Kvadratens area är lika med summan av alla trianglars areor; om vi betecknar deras halvperimetrar respektive radie till inskrivna cirkeln med p_k, respektive r_k, samt kvadratens sidlängd med a, får vi

$$a^2 = \sum_k r_k p_k < 2a \sum_k r_k,$$

och påståendet följer.

5. I nästa års final i Skolornas matematiktävling deltar 20 finalister. Finalskrivningen innehåller sex problem. Emil påstår att det oavsett resultat måste finnas fem tävlande och två problem sådana att antingen alla de fem tävlande löser båda problemen, eller ingen av dem löser något av de två problemen. Har han rätt?

Lösning. Nej. Det räcker att konstruera ett motexempel. Notera att antalet sätt att välja 3 problem av 6 (utan hänsyn tagen till ordningen) är 20. Därför är det möjligt att var och en av de 20 deltagarna har löst exakt tre problem korrekt, och att inga två deltagare har löst samma problemtrippel. Varje problempar kan fyllas ut till en trippel på exakt fyra olika sätt. I den betraktade konfigurationen har alltså varje par av problem lösts av exakt fyra elever, och samtidigt är det exakt fyra deltagare som ej har löst något av problemen i paret. Det är därmed visat att Emil har fel.

6. Bestäm alla udda primtal p och q sådana att ekvationen

$$x^p + y^q = pq$$

har minst en lösning (x, y), där x och y är positiva heltal.

Lösning. Antag först att $x \geq 2$ och $y \geq 2$. Vi ska visa att det inte finns några lösningar i detta fall. Vi visar först att

$$2^k > \tfrac{1}{2}k^2, \tag{2}$$

för alla $k \in \mathbb{N}$, vilket medför

$$x^p + y^q \geq 2^p + 2^q > \frac{1}{2}(p^2 + q^2) \geq pq.$$

För att visa (2), betrakta ekvationen $2^t = t^2$. Denna har två uppenbara lösningar $t = 2$ och $t = 4$. Genom att logaritmera båda leden ses att ekvationen är ekvivalent med $t \ln 2 = 2 \ln t$. Här är vänsterledet en linjär funktion, och högerledet är en konkav funktion, så de två funna lösningarna är de enda som finns. Detta ger också att $2^t > t^2$ för alla $t > 4$, och vi ser att $2^t > \frac{1}{2}t^2$ för alla $t > 4$. De tre sista fallen kontrolleras:

$$2^2 > \tfrac{1}{2}2^2 \qquad 2^3 > \tfrac{1}{2}3^2 \qquad 2^4 > \tfrac{1}{2}4^2.$$

Det första och det sista är inte överraskande då vi hade likhet innan vi dividerade med 2.

Eftersom det är omöjligt att $x \geq 2$ och $y \geq 2$, måste en av dem vara lika med 1. Det är dessutom uppenbart att båda inte kan vara lika med 1. Utan inskränkning kan vi alltså anta att $x = 1, y \geq 2$, och vi ska lösa

$$1 + y^q = pq.$$

Tas detta modulo q fås $1+y^q \equiv 0 \pmod{q}$. Vi ska visa att det medför $1+y \equiv 0 \pmod{q}$, så att $y \equiv -1 \pmod{q}$. Vi har

$$(1+y)^q = 1+qy+\cdots+\binom{q}{k}y^k+\cdots+qy^{q-1}+y^q, \quad \text{där} \quad \binom{q}{k} = \frac{q(q-1)\cdots(q-k+1)}{k!}.$$

Alla binomialkoefficienter $\binom{q}{k}$, där $k = 1, \ldots, q-1$, innehåller faktorn q i täljaren. Ingen av nämnarens faktorer kan vara q, och q är ett primtal, vilket betyder att alla termer i summan utom första och sista är delbara med q. Därmed gäller att $1 + y^q \equiv (1+y)^q \equiv 0 \pmod{q}$, och det följer att $1 + y \equiv 0 \pmod{q}$. Notera att det är väsentligt att q är ett primtal. Det betyder att $y = kq - 1$ för något positivt heltal k. Detta sätts in, och vi får $pq = 1 + (kq-1)^q$. Eftersom q är ett primtal kommer binomialkoefficienterna att vara delbara med q. Eftersom q dessutom är udda är högerledet delbart med q^2, och det följer att $p = q$.

Det är lätt att med hjälp av matematisk induktion visa olikheten[1] $2^m \geq m^2 - 1$, för alla heltal $m \geq 3$, med likhet om och endast om $m = 3$. Vi har nu

$$q^2 = 1 + y^q \geq 1 + 2^q \geq 1 + (q^2 - 1) = q^2,$$

vilket medför att $y = 2$ och $q = 3\,(= p)$.

Vi kontrollerar att vi för $p = q = 3$ verkligen fått en lösning till den urspungliga ekvationen

$$1^3 + 2^3 = 3 \cdot 3.$$

De enda möjliga udda primtalen med den sökta egenskapen är alltså $(p, q) = (3, 3)$.

[1]Samma olikhet kan användas för att i början utesluta fallet $x \geq 2$ och $y \geq 2$.