SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Linköping den 21 november 2015

1. Givet är den spetsiga triangeln ABC. En diameter till triangelns omskrivna cirkel skär sidorna AC och BC, och delar därvid sidan BC mitt itu. Visa att samma diameter delar sidan AC i förhållande $1 : 3$, räknat från A, om och endast om $\tan B = 2 \tan C$.

Lösning. Beteckna skärningspunkten mellan AC och den beskrivna diametern med D. Beteckna vinklarna vid A, B, C med α, β, γ, respektive. Diametern genom D delar kordan BC mitt itu, och är därmed vinkelrät mot BC. Den innehåller alltså såväl medianen som höjden från D i triangeln BDC, vilket medför att $\triangle BDC$ är likbent med $BD = DC$. Enligt basvinkelsatsen gäller att $\angle DBC = \angle DCB = \gamma$. Att diametern skär sidan AC och inte AB betyder att $AC > AB$, och därmed $\beta > \gamma$, och $\angle ABD = 180^\circ - \alpha - 2\gamma = \beta - \gamma$.

Notera att γ inte kan vara den största vinkeln i triangeln, vilket betyder att $\gamma < 90^\circ$.

Antag att $AD : DC = 1 : 3$. Sinussatsen för $\triangle ABD$ ger nu

$$\frac{AD}{\sin(\beta - \gamma)} = \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{DC}{\sin(180^\circ - \beta - \gamma)} = \frac{3\,AD}{\sin(\beta + \gamma)},$$

så att $\sin(\beta + \gamma) = 3 \sin(\beta - \gamma)$, och, efter omskrivning, $\sin \beta \cos \gamma = 2 \sin \gamma \cos \beta$. Vi har tidigare noterat att $\gamma < 90^\circ$, så att $\cos \gamma \neq 0$. Om vinkeln β vore rät skulle det betyda att omskrivna cirkelns medelpunkt ligger på AC och därmed sammanfaller med D. Det skulle då gälla $AD = DC$, vilket är omöjligt, givet att $AD : DC = 1 : 3$. Division med $\cos \beta \cos \gamma \neq 0$ ger nu den önskade likheten $\tan \beta = 2 \tan \gamma$.

Antag nu att $\tan \beta = 2 \tan \gamma$. Samma omskrivning som tidigare, åt andra hållet, ger $\sin(\beta + \gamma) = 3 \sin(\beta - \gamma)$, och

$$\frac{AD}{\sin(\beta - \gamma)} = \frac{BD}{\sin \alpha} = \frac{DC}{\sin(180^\circ - \beta - \gamma)} = \frac{DC}{\sin(\beta + \gamma)} = \frac{DC}{3 \sin(\beta - \gamma)},$$

och det följer att $DC = 3AD$.

2. Bestäm alla heltalslösningar till ekvationen $x^3 + y^3 + 2015 = 0$.

Lösning. Vi skriver om ekvationen och faktoriserar såväl summan av de två kuberna som talet 2015

$$(x + y)(x^2 - xy + y^2) = -5 \cdot 13 \cdot 31.$$

Antag att (x, y) är en lösning till ekvationen, där x, y är heltal. Det är uppenbart att minst ett av talen måste vara negativt. Den andra faktorn i vänsterledet är alltid positiv, vilket betyder att $x + y$ måste vara den negativa faktorn. Alla positiva delare till 2015 är

$$1, 5, 13, 31, 65, 155, 403, 2015.$$

Vi skulle nu kunna undersöka alla möjligheter, det vill säga för $x+y=-a$, där a är någon av delarna i listan sätta in $y=-x-a$ i den andra faktorn och se om den för något heltal y blir lika med $\dfrac{2015}{a}$. För $a=1$ ser det ut som följer

$$y=-x-1,\ x^2-xy+y^2=x^2+x^2+x+x^2+2x+1=3x^2+3x+1=2015,$$

som saknar heltaslösningar, eftersom 2014 inte är delbart med 3. För $a=5$ får vi

$$y=-x-5,\ x^2-xy+y^2=3x^2+15x+25=403,$$

som har lösningarna $x=9$ och $x=-14$. Vi har alltså hittat två heltalslösningar till den ursprungliga ekvationen, nämligen $x=9,\ y=-14$, och $x=-14,\ y=9$.

Vi ska visa att det inte finns några andra heltalslösningar utom de två redan funna.

Istället för att fortsätta med samma uttömmande metod kan vi ta hjälp av delbarhet för att eliminera vissa delare utan att behöva ta oss igenom alla beräkningar.

Alla heltal ger någon av resterna $0,1,2,3,4,5,6,7,8$ vid division med 9. Deras kuber ger då resterna $0,1,-1,0,1,-1,0,1,-1$, det vill säga alla heltalskuber är lika med 0 eller ±1, modulo 9. Eftersom -2015 ger rest 1 vid division med 9, måste ett av talen x^3, y^3 ge rest 0, och det andra rest 1. Det ena av talen x, y måste alltså vara delbart med 3, medan det andra måste ge rest 1 vid division med 3, eftersom $(3k-1)^3=9(3k^3-3k^2+k)-1$. Summan $x+y$ är då lika med 1, modulo 3. De enda talen i listan över negativa delare till 2015 som ger rest 1 vid division med 3 är de som slutar på 5. Vi behöver alltså eliminera fallen $x+y=-65;\ -155;\ -2015$. Vi påminner om att eftersom andragradsfaktorn alltid är positiv måste minustecknet tillskrivas faktorn $x+y$.

Antag att $x+y=-65$, så att $y=-65-x$. Vi har $x^2-xy+y^2=(x+y)^2-3xy=4225-3xy=31$, och $xy=1398$, vilket ger ekvationen $x^2+65x+1398=0$, som saknar reella lösningar. De två andra fallen ger också andragradsekvationer som saknar reella lösningar. Därmed är de två funna paren ekvationens enda heltalslösningar.

3. Låt a, b, c vara positiva reella tal. Bestäm det minsta värde som kan antas av följande uttryck

$$\frac{a^2+2b^2+4c^2}{b(a+2c)}.$$

Lösning. Vi har

$$a^2+2b^2+4c^2=(a^2+b^2)+(b^2+(2c)^2)\geq 2ab+4bc=2b(a+2c),$$

vilket betyder att

$$\frac{a^2+2b^2+4c^2}{b(a+2c)}\geq 2\,.$$

Värdet 2 antas om och endast om $a=b=2c$.

4. Lös ekvationssystemet

$$\begin{cases} x\ln x + y\ln y + z\ln z = 0, \\ \dfrac{\ln x}{x} + \dfrac{\ln y}{y} + \dfrac{\ln z}{z} = 0. \end{cases}$$

Lösning. Båda vänsterleden är definierade för $x, y, z > 0$. Det är uppenbart att $x = y = z = 1$ är en lösning. Vi ska visa att det är den enda.

Det är omöjligt att x, y, z alla är mindre än 1, och det är omöjligt att alla tre är större än 1. Multiplikation med -1 och substitution $u = \dfrac{1}{x}$ etc, leder till att de två ekvationerna byter plats. Vi kan alltså utan inskränkning anta att $x \geq y \geq 1 \geq z$. Vi gör en omskrivning

$$\begin{cases} x^x y^y z^z & = & 1, \\ x^{\frac{1}{x}} y^{\frac{1}{y}} z^{\frac{1}{z}} & = & 1. \end{cases}$$

Den andra ekvationen kan skrivas om som

$$x^{yz} y^{zx} z^{xy} = 1.$$

Eftersom $z \leq 1$, och $xy \geq 1$, har vi $z^{xy} \leq z \leq z^z$. Det medför

$$x^{yz} y^{zx} = (x^y y^x)^z = \frac{1}{z^{xy}} \geq \frac{1}{z^z} = x^x y^y,$$

vilket i sin tur medför

$$x^y y^x \geq x^x y^y,$$

eftersom $x^y y^x \geq 1$ och $z \leq 1$. Vi får nu

$$y^{x-y} \geq x^{x-y}.$$

Då $x - y \geq 0$, leder det till slutsatsen $y \geq x$, vilket betyder att $x = y$. Nu får vi $z \ln z = -2x \ln x$, och $\dfrac{\ln z}{z} = -2\dfrac{\ln x}{x}$. För $z \neq 1$ kan vi utföra en division som ger $z^2 = x^2$, och alltså $z = x$, vilket medför $x = y = z = 1$. För $z = 1$ får vi att $\ln x = 0$, och alltså $x = y = 1$.

5. Givet är ett ändligt antal olika punkter i planet samt lika många olika strålar som börjar i origo. Går det alltid att para ihop punkterna med strålarna så att de parallellförflyttade strålarna med början i respektive punkter inte skär varandra?

Lösning. Svaret är ja.

Vi säger att en stråle har vinkeln v om vinkeln från den positiva x-axeln till strålen är just v. Antag att det finns en konfiguration av punkter Π och vinklar (som motsvarar strålar) V sådana att den beskrivna konstruktionen inte går att utföra. Välj mängderna så att antalet element i vardera, n, är minsta möjliga för mängder med den egenskapen. Det är uppenbart att $n > 1$. Låt v_0 vara minsta elementet i V, och dela upp $V \setminus \{v_0\}$ i två delar, $V_1 = \{v \in V : v_0 < v \leq v_0 + \pi\}$, och $V_2 = \{v \in V : v_0 + \pi < v < v_0 + 2\pi\}$. Varje linje l i planet, parallell med strålen r_0 med vinkel v_0, delar planet i två delar. I det ena halvplanet med rand l ligger alla punkter sådana att strålarna med början i dessa punkter och vinklar i V_1 aldrig skär l, och i det andra gäller samma sak för vinklar i V_2. Kalla dessa halvplan λ_1 och λ_2, respektive. Flytta nu linjen l i en riktning vinkelrät mot strålen r_0, från det att alla punkter i den givna punktmängden Π ligger på ena sidan om l, till att alla punkter passerats och hamnat på andra sidan. Varje gång man passerar en punkt minskar/ökar antalet punkter i $\lambda_1 \cap \Pi$ med 1, medan antalet punkter i $\lambda_2 \cap \Pi$ genomgår den motsatta förändringen. Det kommer att finnas en punkt $P_0 \in \Pi$ sådan att om l går genom P_0, så gäller $|\lambda_1 \cap \Pi| \leq |V_1|$, och $|\lambda_2 \cap \Pi| \leq |V_2|$. Om vi har likhet i båda olikheterna kan vi placera r_0 i P_0, och, eftersom n valdes minimalt, parallellförflytta alla strålar med vinklar i V_i till punkter i $\lambda_i \cap \Pi$, $i = 1, 2$. Om en av olikheterna är strikt betyder det att linjen l genom P_0 innehåller minst en punkt till från Π. Vi kan utan inskränkning anta att vi valt P_0 så att strålen med vinkel v_0 från P_0 inte innehåller några andra punkter från $l \cap \Pi$. Dessa punkter kan nu inkluderas i λ_2 (eller λ_1, om vinkeln $v_0 + \pi$ inte förekommer), varefter vi kan avsluta resonemanget som ovan. Vi får att konstruktionen är genomförbar för n, vilket är motsägelse med antagandet att n är det minsta talet, för vilket den inte är genomförbar. Motsägelsen visar att det inte finns positiva heltal sådana att konstruktionen inte är genomförbar.

6. Axel och Berta spelar följande spel: På en tavla står ett antal positiva heltal. Ett drag består i att en spelare byter ut ett tal x på tavlan mot två positiva heltal y och z (inte nödvändigtvis olika), sådana att $y + z = x$. Spelet avslutas då talen på tavlan är parvis relativt prima. Den spelare som gjort det sista draget har då förlorat spelet. I början av spelet står endast talet 2015 på tavlan. Spelarna gör vartannat drag och Berta börjar. En av spelarna har en vinnande strategi. Vem, och varför?

Lösning. Vi ska visa att Axel har en vinnande strategi. Kalla en situation *dålig* om talen på tavlan är fördelade som följer X, X, n, där X är en delmängd i mängden av positiva heltal och n är ett udda positivt heltal. Situationen är dålig när Berta börjar, med $X = \emptyset$, och $n = 2015$. Vi ska visa att Axel alltid kan välja drag så att Berta återigen hamnar i en dålig situation. Om Berta byter ut ett tal $x \in X$ mot y och z med $y \geq z$, så kan Axel göra exakt samma drag i den andra X-mängden. Om Berta byter ut n mot y, z med $y > z$, så kan Axel byta ut y mot z och $y - z$, varpå situationen är dålig igen inför Bertas nästa drag.

Vi behöver visa att Axel inte kan förlora efter något av de ovan beskrivna dragen.

I det första fallet, då Berta bytt ut $x \in X$ mot y och z, tittar vi på två möjligheter, $x > 2$ och $x = 2$. Om $x > 2$ kommer paret (y, y) med största gemensamma delare $y > 1$ att finnas på tavlan efter Axels drag, så han förlorar inte. Om $x = 2$, så måste $y = z = 1$. Om Berta inte redan förlorat efter det draget, så måste det finnas ett par tal u och v på tavlan som inte är relativt prima. Antalet jämna tal på tavlan efter Bertas drag är alltid udda. Om det bara är ett jämnt tal kvar, så är både u och v udda, och eftersom de står kvar efter Axels drag kan han inte ha förlorat. Om det är tre eller fler, så utgör två av dem ett par som inte är relativt prima. Axel förlorar alltså inte.

I det andra fallet, då Berta bytt ut det udda talet n mot y och z, med $y > z$, så står istället $z, z, y - z$ efter Axels drag. Om $z > 1$, så $(z, z) = z > 1$, och Axel har inte förlorat. Om $z = 1$, och Berta inte har förlorat efter sitt drag, så måste det finnas ett tal större än 1 i X. Eftersom X finns i två exemplar, så kommer även det talet att förekomma två gånger, och Axel har inte förlorat.

Eftersom antalet kombinationer och drag man kan göra är ändligt, och vi har visat att Axel alltid kan göra ett drag utan att förlora, så har han en vinnande strategi.