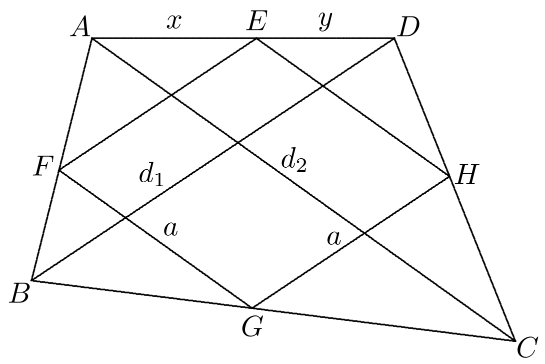
SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Finaltävling i Stockholm den 22 november 2008

Förslag till lösningar

Problem 1. En romb är inskriven i en konvex fyrhörning. Rombens sidor är parallella med fyrhörningens diagonaler, som har längderna d_1 och d_2. Beräkna längden av rombens sida, uttryckt i d_1 och d_2.

Lösning: Vi betecknar fyrhörningens hörn med A, B, C, D och antar att $|BD| = d_1$ och $|AC| = d_2$. Rombens hörn, betecknade E, F, G, H, ligger på sidorna AB, BC, CD, DA resp. Sätt $x = |AE|$ och $y = |ED|$ och låt rombens sida vara a (se figuren).



Enligt topptriangelsatsen är (topp)triangeln AFE likformig med triangeln ABD, vilket ger sambandet

$$\frac{|AE|}{|AD|} = \frac{|FE|}{|BD|} \quad \text{eller} \quad \frac{x}{x+y} = \frac{a}{d_1}.$$

På samma sätt är (topp)triangeln DEH likformig med triangeln DAC, vilket leder till sambandet

$$\frac{|DE|}{|DA|} = \frac{|EH|}{|AC|} \quad \text{eller} \quad \frac{y}{x+y} = \frac{a}{d_2}.$$

Summering av identiteterna ger

$$\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y} = \frac{a}{d_1} + \frac{a}{d_2}, \quad \text{varav} \quad a(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}) = 1 \quad \text{och vi får}$$

$$a = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}.$$

Anm. Harmoniska medelvärdet av två positiva tal u och v definieras som $H = \frac{1}{\frac{1}{2}(\frac{1}{u}+\frac{1}{v})}$. Längden av sidan a är alltså lika med halva harmoniska medelvärdet av diagonalernas längder.

Kommentar. Förutsättningen att fyrhörningen är konvex innebär att varje punkt på diagonalen BD resp diagonalen AC, förutom de båda ändpunkterna, ligger i det inre av fyrhörningen. Diagonalerna skär följaktligen varandra i det inre av fyrhörningen.

Man kan fråga sig om det alltid är möjligt att inskriva en parallellogram och speciellt en romb på nämnt sätt i en konvex fyrhörning. Men detta följer av ovanstående, eftersom topptriangeln AFE delar triangeln ABD i samma förhållande som topptriangeln CHG delar triangeln CDB. Motsvarande gäller för de båda återstående topptrianglarna, DEH och BGF. Det betyder att om E, F, G, H är punkter på de fyra sidorna så att FE och GH är parallella med den ena diagonalen, BD, så är EH och FG parallella med den andra diagonalen, AC.

Problem 2. Bestäm det minsta heltal $n \geq 3$ med egenskapen att man kan välja två av talen $1, 2, \ldots, n$ på ett sådant sätt att deras produkt är lika med summan av de övriga $n-2$ talen. Vilka är de två talen?

Lösning: Låt de valda talen vara a och b, där vi utan inskränkning kan anta att $a < b$. Eftersom summan av talen $1, 2, \ldots, n$ är $\frac{n(n+1)}{2}$, kan vi uttrycka det givna villkoret som

$$ab = \tfrac{n(n+1)}{2} - (a+b),$$

dvs som

$$ab + a + b = \tfrac{n(n+1)}{2}$$

eller

$$(a+1)(b+1) = \tfrac{n(n+1)}{2} + 1.$$

Det gäller att

$$2 \leq a+1 < b+1 \leq n+1 \tag{1}$$

Vi ställer upp en tabell och hoppas på att finna en lösning för ett inte alltför stort värde på n. Låt $g(n) = \frac{n(n+1)}{2} + 1$ och beräkna värdet av $g(n)$ för $n = 1, 2, \ldots, 15:$

n:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$g(n)$:	2	4	7	11	16	22	29	37	46	56	67	79	92	106	121

(Vi noterar att $g(n) = g(n-1) + n$, vilket underlättar uppställandet av tabellen.) För att (1) ska vara uppfyllt måste $g(n) \geq 6$ $(= 2 \cdot 3)$. Vidare får $g(n)$ inte vara primtal och ska kunna skrivas som en produkt av två olika heltal som båda är $\leq n+1$. Om $g(n) \geq 4$ kan vi dessutom utesluta n-värden för vilka $g(n) = 2 \cdot p$, där p är ett primtal, ty då gäller nämligen att $\frac{2p}{n+1} = \frac{g(n)}{n+1} > \frac{n}{2} \geq 2$, varav $p > n+1$.
I tabellen kan vi således direkt utesluta $g(n)$-värden för alla n utom $5, 10, 13, 15$. Men $n = 5$ är inte möjligt, eftersom vid faktoriseringen av $g(5) = 16$ varken $2 \cdot 8$ (ingen faktor fick vara större än $n+1$) eller $4 \cdot 4$ (faktorerna fick inte vara lika) fungerar. För $n = 10$ däremot har vi en tillåten faktorisering: $56 = 7 \cdot 8$, dvs de båda talen a och b i uppgiften måste vara 6 och 7 resp med produkten 42, vilket ju är lika med summan av de övriga åtta talen, $55 - 6 - 7 = 42$. För övriga faktoriseringar av 56 är (1) inte uppfyllt. Vi har alltså funnit att det minsta möjliga n-värdet är 10.

Svar: Det minsta värdet på n är 10 och de båda talen är 6 och 7.

Problem 3. Funktionen $f(x)$ har egenskapen att $\frac{f(x)}{x}$ är växande för $x > 0$. Visa att

$$f(x) + f(y) \leq f(x+y), \quad \text{för alla} \;\; x, y > 0.$$

Lösning: Vi antar här att $x > 0$ och $y > 0$. Enligt förutsättningen är

$$\frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(x+y)}{x+y} \quad \text{så att} \quad f(x) \leq \frac{x}{x+y} f(x+y)\,.$$

På samma sätt får vi

$$f(y) \leq \frac{y}{x+y} f(x+y)\,.$$

Om de båda sistnämnda olikheterna adderas, erhålls

$$f(x) + f(y) \leq \Big(\frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+y}\Big) f(x+y) = f(x+y)\,,$$

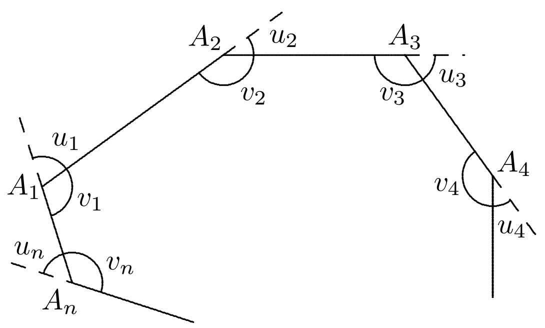
och olikheten är visad.

Problem 4. En konvex n-hörning har vinklar $v_1, v_2, \ldots, v_n$ (i grader), där alla v_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ är positiva heltal delbara med 36.

a) Bestäm det största n för vilket detta är möjligt.

b) Visa att om $n > 5$, så måste två av n-hörningens sidor vara parallella.

Lösning: **a)** Låt yttervinklarna till n-hörningen, angivna medurs från något starthörn A_1, vara $u_1, u_2, \ldots, u_n$. Eftersom yttervinklarna är supplementvinklar till vinklarna i n-hörningen, har vi $u_i = 180° - v_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ (se figuren). Enligt förutsättningarna är mätetalen för n-hörningens vinklar, och därmed också för yttervinklarna, delbara med 36 och vi kan skriva $u_i = 36k_i$, där k_i är heltal, $1 \leq k_i \leq 4$.



Vinkelsumman i n-hörningen är $180(n-2)°$ (n-hörningen kan indelas i $n-2$ deltrianglar), medan vinkelsumman för yttervinklarna är $180n - 180(n-2) = 360°$, oberoende av värdet på n $(n \geq 3)$. Det följer att

$$360 = \sum_{i=1}^{n} u_i = \sum_{i=1}^{n} 36k_i \geq \sum_{i=1}^{n} 36 = 36n\,,$$

varav $n \leq 10$. Vi har likhet för $n = 10$ när alla $k_i = 1$, dvs alla $u_i = 36°$ och alla $v_i = 144°$.

b) En sida i n-hörningen är parallell med en annan sida om den sammanlagda vinkeländringen dem emellan är delbar med 180. I figuren gäller att vinkeländringarna från sidan A_nA_1 till sidorna A_1A_2, A_2A_3 , $A_3A_4, \ldots$ är resp u_1, $u_1 + u_2$, $u_1 + u_2 + u_3, \ldots$ (vi har här valt att uttrycka vinkeländringarna via yttervinklarna). Vi ska visa att det för $n \geq 6$ alltid finns två sidor som är parallella, dvs för vilka vinkeländringen dem emellan är delbar med 180. Eftersom $u_i = 36k_i$, där $k_i = 1, 2, 3, 4$, kan vi alternativt uttrycka vinkelförändringar som "k-värdesändringar"och vi ska således visa att det alltid finns två sidor för vilka k-värdesändringen är delbar med 5.

Låt $S_m = k_1 + k_2 + \ldots + k_m$ för $m = 1, \ldots, n$. Om S_m är delbart med 5 för något värde på m är det hela klart. Förändringen mellan sidan A_nA_1 och sidan A_mA_{m+1} är då delbar med 5 och vinkeländringen dem emellan delbar med 180. Om inte, följer det av lådprincipen att minst två av S_m-värdena (det finns åtminstone sex sådana) måste ge samma rest vid division med 5. Låt dessa delsummor vara S_i och S_j, $i < j$. Vi skriver detta som $S_i \equiv S_j \pmod 5$. Men det medför att $S_j - S_i = k_{i+1} + k_{i+2} + \ldots + k_j$ är delbart med 5, vilket kan skrivas $S_j - S_i \equiv 0 \pmod 5$, dvs k-värdesändringen från sidan A_iA_{i+1} till sidan A_jA_{j+1} är delbar med 5 och följaktligen är vinkeländringen dem emellan delbar med 180. Nämnda sidor är således parallella och påståendet är visat.

Svar: a) $n = 10$

Problem 5. Anna och Örjan spelar följande spel: de börjar med ett positivt heltal $n > 1$ som Anna skriver som summan av två andra positiva heltal, $n = n_1 + n_2$. Örjan stryker ett av dem, n_1 eller n_2. Om det återstående talet är större än 1 upprepas processen, d.v.s. Anna skriver det som summan av två positiva heltal, $n_3 + n_4$, Örjan stryker ett av dem etc. Spelet slutar när det återstående talet är 1. Örjan är vinnare om det finns två lika tal bland de tal som han har strukit, annars vinner Anna. Vem vinner spelet om $n = 2008$ och båda två spelar optimalt?

Lösning: Vi ska visa att Anna alltid kan vinna om n är en $2-$potens, medan Örjan alltid kan vinna för övrigt. Eftersom 2008 inte är en tvåpotens, vinner Örjan om båda spelar optimalt.
Betrakta först fallet att n är en tvåpotens, $n = 2^k$ för något heltal k. I första steget skriver Anna n som summan av två lika tal, $n_1 = n_2 = 2^{k-1}$ och Örjan stryker det ena. Om $k \geq 1$ skriver Anna nästa gång $n/2 = 2^{k-1}$ åter som summan av två lika tal, $n_3 = n_4 = 2^{k-2}$. Spelet slutar så småningom med att Örjan stryker talet 1 och talet 1 återstår. Vi ser att de tal som Örjan stryker alla är olika, $2^{k-1}, 2^{k-2}, \ldots, 2, 1$, vilket innebär att Anna vinner.
Betrakta nu fallet att n är skilt från en tvåpotens. Vi ska visa att i detta fall kan Örjan alltid se till att vinna oavsett hur Anna spelar.
Vi visar påståendet med induktion. Beviset består av två steg:
(i) Vi visar att påståendet är sant för $n = 3$.
(ii) Låt $n > 3$ vara ett heltal som inte är en tvåpotens. Antag att det för varje starttal $m \leq n - 1$ som inte är en tvåpotens gäller att Örjan alltid vinner om båda spelar optimalt (induktionsantagande). Vi ska visa att Örjan då alltid vinner om starttalet är n och båda spelar optimalt.
Steg (i). Om $n = 3$ kan Örjan alltid se till att han stryker talet 1 två gånger, vilket innebär vinst för honom.
Steg (ii). Låt alltså $n > 3$ vara ett heltal som inte är en tvåpotens. Om Anna i det första draget skriver n, som summan av två olika tvåpotenser (nu kan de inte vara lika), väljer Örjan den mindre tvåpotensen. Om Anna skriver det återstående talet som en summa av två lika tvåpotenser och använder denna strategi genomgående tills spelet tar slut, kommer den tvåpotens som Örjan strök första gången att dyka upp igen och Örjan vinner. För att undvika detta tvingas Anna, innan detta sker, att skriva aktuellt tal som en summa av tal där högst ett av talen är en tvåpotens. Men inte heller detta kan rädda Anna från förlust som vi strax ska se. (Vi kan notera att om Örjan inledde med att stryka talet 1, kan Anna inte förhindra att Örjan får möjlighet att stryka talet 1 ytterligare en gång.)
Om Anna i första draget skriver n som två olika tal, där bara det ena talet är en tvåpotens, stryker Örjan detta tal. Om Anna skriver det första talet som summan av två tal av vilka ingen är en tvåpotens, stryker Örjan det mindre talet. I båda fallen kommer Anna i nästa steg att dela upp ett tal $< n$, som inte är en tvåpotens (vi kan uppfatta detta som ett startläge) och Örjan vinner enligt induktionsantagandet.

Svar: Om n inte är en tvåpotens kan Örjan alltid vinna. I specialfallet $n = 2008$ vinner alltså Örjan om båda spelar optimalt.

Problem 6. En uppdelning av talet 100 ges av ett positivt heltal n och n positiva heltal $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ sådana att $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 100$. Bestäm det största möjliga värdet av produkten $x_1 x_2 \ldots x_n$, då n, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ varierar bland alla uppdelningar av talet 100.

Lösning: Varje positivt tal N har en uppdelning, då talet N i sig innebär en uppdelning med $n = 1$. Då varje tal N har högst ändligt många uppdelningar, finns det minst en uppdelning av N som ger maximal produkt. Låt oss säga att en uppdelning av N är *optimal* om den ger en maximal produkt. Låt $X_N = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ vara en optimal uppdelning av N, $N = 1, 2, \ldots$, och låt P_N vara motsvarande maximala produkt. Vi söker P_{100}, men låt oss först studera det allmänna problemet för godtyckligt $N \geq 1$.

Vi finner att $P_N = N$ för $N = 1, 2, 3, 4$. I fortsättningen antar vi att $N \geq 5$. Då är $2(N-2) > N$, dvs för en optimal uppdelning måste $n \geq 2$. Vi betraktar först uppdelningar som kan visas vara icke-optimala. Vi delar in sådana uppdelningar av N i följande fall:

1) En uppdelning X_N för vilken det existerar två heltal $i, j \notin X_N$ sådana att $x_1 < i < j < x_n$, kan inte vara optimal. Vi kan utan inskränkning anta att $x_k = i - 1$ och $x_l = j + 1$. Om vi i uppdelningen X_N ersätter x_k med $x_k + 1$ och x_l med $x_l - 1$ får vi en uppdelning av N med större produkt, efterom

$$(x_k + 1)(x_l - 1) = x_k x_l + (x_l - x_k) - 1 \geq x_k x_l + 3 - 1 > x_k x_l \,.$$

2) En uppdelning X_N för vilken $x_1 = 1$ kan inte vara optimal. Om vi nämligen ersätter x_1 och x_n med $x_n + 1$ får vi en uppdelning med $n - 1$ element och med större produkt, ty $x_1 x_n < x_n + 1$.

3) En uppdelning X_N för vilken $x_1 > 4$ kan inte vara optimal. Om vi ersätter x_1 med 2 och $x_1 - 2$ får vi en uppdelning med $n + 1$ element och med större produkt, då

$$2(x_1 - 2) = x_1 + (x_1 - 4) > x_1 \,.$$

4) En uppdelning X_N för vilken $x_1 = 4$ kan inte vara optimal. Om vi ersätter x_1 och x_2 med 2, $x_1 - 1$ och $x_2 - 1$ får vi en uppdelning med $n + 1$ element och med större produkt, eftersom

$$\begin{aligned} 2(x_1 - 1)(x_2 - 1) &= 2x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 2 = x_1 x_2 + (x_1 - 2)(x_2 - 2) - 2 \\ &\geq x_1 x_2 + 6 - 2 > x_1 x_2 \,. \end{aligned}$$

5) En uppdelning X_N för vilken $x_1 = 3$ kan inte vara optimal om det existerar ett heltal $i \notin X_N$ sådant att $x_1 < i < x_n - 1$. Vi kan utan inskränkning anta att $i + 2 \in X_N$. Om vi ersätter $i + 2$ med 2 och i får vi en uppdelning med $n + 1$ element och med större produkt, då

$$2i \geq i + x_1 + 1 > i + 2 \,.$$

För att en uppdelning X_N ska vara optimal, kan inte något av fallen 1–5 gälla. En optimal uppdelning står följaktligen att finna bland uppdelningar med följande egenskaper:

a) Det gäller att $x_1 = 2$ och det finns exakt ett heltal $i \notin X_N$ sådant att $2 < i < x_n$

eller
b) Det gäller att $x_1 = 3$ och det finns exakt ett heltal $i \notin X_N$ sådant att $3 < i < x_n$, där i så fall $i = x_n - 1$.
eller
c) Det gäller att $x_1 = 2$ eller $x_1 = 3$ och uppdelningen ges av talen i den aritmetiska talföljden $i, i+1, \ldots, n+i-1$, där alltså $i = 2$ eller $i = 3$.
Några andra uppdelningar av N finns inte. Den optimala uppdelningen måste följaktligen bestå av n element som är fördelade enligt:

$$\{i, i+1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n+i\},$$

där $i = 2$ eller $i = 3$ och där k antar något av värdena $2, 3, \ldots, n+i$ med de undantag som anges under b). Sätt

$$l_n = 2 + 3 + \ldots + n + (n+1) = \frac{n(n+3)}{2}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

De möjliga maximal uppdelningarna med n element är

Uppdelning	Summa
$\{2, 3, \ldots, n, n+1\}$	l_n
$\{2, 3, \ldots, n, n+2\}$	$l_n + 1$
$\{2, 3, \ldots, n-1, n+1, n+2\}$	$l_n + 2$
$\ldots$	$\ldots$
$\{2, 4, \ldots, n, n+1, n+2\}$	$l_n + n - 1$
$\{3, 4, \ldots, n, n+1, n+2\}$	$l_n + n$
$\{3, 4, \ldots, n, n+1, n+3\}$	$l_n + n + 1$

Det gäller att $l_{n+1} = l_n + n + 2$ och vi observerar att varje heltal i intervallet $[l_n, l_{n+1})$ uppträder som summa exakt en gång och alltså är motsvarande uppdelning optimal för varje summatal.
Vi noterar nu att $100 \in [l_{12}, l_{13}) = [90, 104)$. Eftersom $l_{13} = 104 = 2 + 3 + \ldots + 14$ får vi summan 100 om vi utesluter termen 4, varför den optimala uppdelningen för $N = 100$ är $\{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$ med produkten $\frac{14!}{4} = 21\,794\,572\,800$.

Svar: Den maximala produkten är $\frac{14!}{4} = 21\,794\,572\,800$, vilken erhålles för uppdelningen $\{2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$.