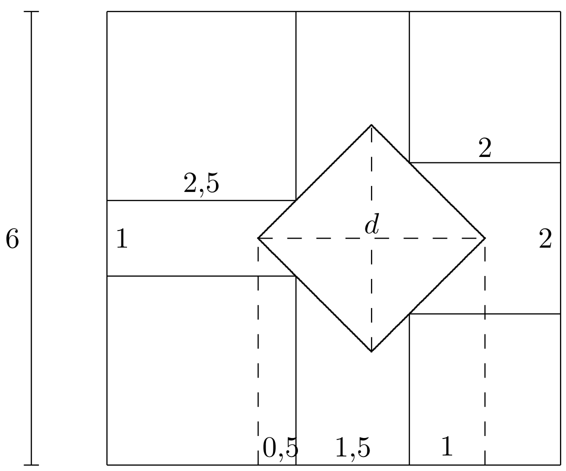
SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Finaltävling i Göteborg den 21 november 2009

Förslag till lösningar

Problem 1. Till en kvadratisk sal med sidan 6 m har man anskaffat fem kvadratiska mattor, två med sidan 2 m, en med sidan 2,1 m och två med sidan 2,5 m. Är det möjligt att placera ut de fem mattorna så att de inte på något ställe överlappar varandra? Mattornas kanter behöver inte vara parallella med salens väggar.

Lösning: Placera mattorna i var sitt hörn som figuren visar. Eftersom mattorna är symmetriskt placerade med de båda största mattorna längs en sida av salen och de båda minsta längs den motsatta sidan, inser vi att det är möjligt att hitta en kvadratisk yta i mitten av salen med diagonalerna parallella med salens sidor. Kvadraten "sticker in" 0,5 m mellan de båda största mattorna och 1 m mellan de bägge mindre mattorna. Diametern d hos kvadraten blir lika med $0,5+1,5+1=3$ m, varav följer att kvadratens area är $\frac{1}{2}\cdot d^2 = 4,5$ m^2. Men den återstående mattan har sidan 2,1 m, vilket innebär att dess area är $2,1^2 = 4,41$ m^2 och således understiger arean av nämnda kvadrat. Mattans sida måste därför vara mindre än kvadratens sida och det finns följaktligen plats för mattan inom ramen för kvadraten.



Problem 2. Finn alla reella lösningar till ekvationen

$$(1+x^2)(1+x^3)(1+x^5) = 8x^5.$$

Lösning: För $x<0$ är $VL \geq 0$ och $HL<0$ (i vänsterledet är två av faktorerna negativa för $x<-1$, två är lika med 0 för $x=-1$, medan alla tre faktorerna är positiva för $-1<x<0$). För $x=0$ är $VL>0$ och $HL=0$. Det finns således ingen lösning för $x \leq 0$.
Fallet $x>0$ återstår. Efter division av bägge leden med $x^5 = x\cdot x^{3/2}\cdot x^{5/2}$ ser vi att ekvationen kan skrivas

$$\left(\frac{1}{x}+x\right)\left(\frac{1}{x^{3/2}}+x^{3/2}\right)\left(\frac{1}{x^{5/2}}+x^{5/2}\right) = 8. \qquad (1)$$

Varje parentesuttryck i vänsterledet har formen $(a + \frac{1}{a})$, där $a = x$, $x^{3/2}$, $x^{5/2}$ resp. Varje sådan faktor kan visas vara större än eller lika med 2, med likhet om och endast om $a = 1$. Eftersom $a > 0$ kan faktorn nämligen skrivas som

$$\left(\sqrt{a} - \tfrac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 + 2,$$

vilket är ≥ 2 med likhet $\Leftrightarrow a = 1$. För $a = x$, $x^{3/2}$, $x^{5/2}$ resp. gäller likheten om och endast om $x = 1$. Om vi betecknar vänsterledet i (1) med $VL(x)$, finner vi alltså att $VL(x) \geq 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, med likhet $\Leftrightarrow x = 1$, vilket innebär att $x = 1$ är en lösning till ekvationen och att lösningen är entydig.

Svar: $x = 1$.

Problem 3. En urna innehåller ett antal gula och gröna kulor. Man drar två kulor ur urnan (utan att lägga tillbaka dem) och beräknar sannolikheten för att båda kulorna är gröna. Kan man välja antalet gula och gröna kulor så att denna sannolikhet är 1/4?

Lösning: Låt n vara totala antalet kulor och k antalet gröna kulor. Vi söker n och k, $n \geq k \geq 2$, sådana att sannolikheten för att dra två gröna kulor är $\frac{1}{4}$, dvs

$$\frac{k(k-1)}{n(n-1)} = \frac{1}{4}\,.$$

Det ska alltså gälla att

$$n^2 - n + 1 = 4k^2 - 4k + 1$$

$\Leftrightarrow$

$$n^2 - n + 1 = (2k-1)^2. \tag{2}$$

För att den aktuella sannolikheten ska stämma, måste således $n^2 - n + 1$ vara kvadraten på ett heltal. Men för alla heltal $n \geq 2$ har vi att $(n-1)^2 = n^2 - 2n + 1 < n^2 - n + 1 < n^2$, dvs vänsterledet i (2) ligger mellan två på varandra följande heltalskvadrater och kan därför inte självt vara en heltalskvadrat.

Svar: Nej, det är inte möjligt.

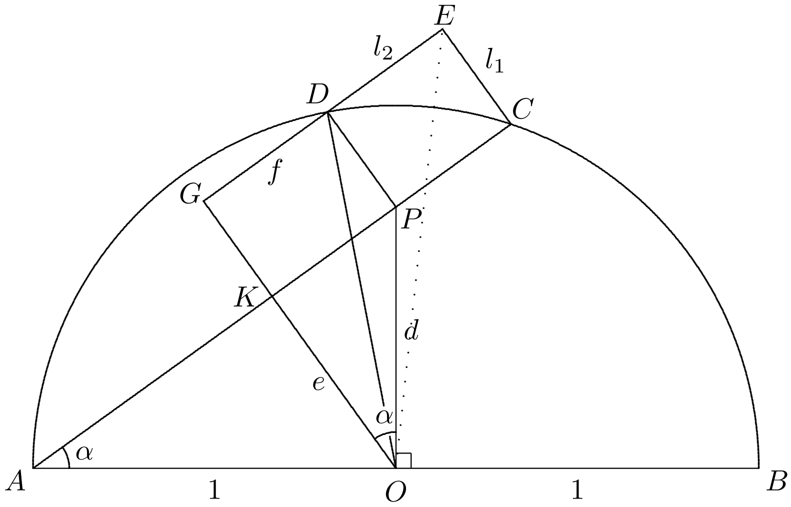
Problem 4. Bestäm alla heltalslösningar till ekvationen $x + x^3 = 5y^2$.

Lösning: Eftersom $HL \geq 0$ så måste $x \geq 0$. Det är klart att $x = y = 0$ är en lösning. Låt oss skriva ekvationen på formen $x(1 + x^2) = 5y^2$. Faktorerna i vänsterledet, x och $1 + x^2$, saknar gemensamma faktorer större än 1 och vi kan skriva $y = s \cdot t$, där s är en faktor i x och t en faktor i $1 + x^2$. Vi betraktar två fall, det ena när x är delbart med 5, det andra när $1 + x^2$ är delbart med 5.
Fall 1: $x = 5s^2$, $1 + x^2 = t^2$ och
Fall 2: $x = s^2$, $1 + x^2 = 5t^2$.
I fall 1 är differensen mellan heltalskvadraterna t^2 och x^2 (i denna ordning) lika med 1, vilket bara inträffar när $x^2 = 0$ och $t^2 = 1$, dvs för $x = 0$ och $t = 1$ och det följer att $y = 0$.
I fall 2 söker vi eventuella lösningar till $1 + s^4 = 5t^2$. Men högerledet är delbart med 5, vilket betyder att slutsiffran är 0 eller 5, medan slutsiffran i vänsterledet är 1, 2, 6, eller 7, vilket betyder att det inte finns någon lösning i detta fall.

Svar: Enda lösning är $(x, y) = (0, 0)$.

Problem 5. En halvcirkelbåge och en diameter AB med längden 2 är given. Låt O vara diameterns mittpunkt. På radien vinkelrät mot diametern väljer vi en punkt P på avståndet d från diameterns mittpunkt O, $0 < d < 1$. En linje genom A och P skär halvcirkeln i punkten C. Genom punkten P drar vi ytterligare en linje vinkelrätt mot AC. Den skär halvcirkeln i punkten D. Genom punkten C drar vi så en linje, l_1, parallell med PD och därefter en linje, l_2, genom D parallell med PC. Linjerna l_1 och l_2 skär varandra i punkten E. Visa att avståndet mellan O och E är lika med $\sqrt{2-d^2}$.

Lösning: Vi inför beteckningar enligt nedanstående figur. Vi drar en linje genom O vinkelrätt mot linjen AC. Den skär linjen genom D och E i punkten G samt sträckan AC i punkten K. Vår avsikt är att bestämma avståndet mellan O och E genom att först bestämma längden av sträckorna OG och GE och sedan använda Pythagoras sats.
Vi konstaterar att trianglarna AOP, AKO och OKP är likformiga (en vinkel är rät, en annan har storleken α) och vi finner att $e = \sin\alpha = d\cos\alpha$ samt $d = \tan\alpha$.



Det följer nu att $f = |GD| = |KP| = d\sin\alpha$. Via den rätvinkliga triangeln OGD får vi att

$$|OG|^2 = 1 - f^2 = 1 - d^2\sin^2\alpha = 1 - d^2(1-\cos^2\alpha) = 1 - d^2 + \sin^2\alpha.$$

Längden av kateten AK i triangeln AKO är $\cos\alpha$, vilket också är längden av sträckorna KC och GE. Kvadratiska avståndet mellan O och E får vi då som

$$|OG|^2 + |GE|^2 = 1 - d^2 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 2 - d^2.$$

Avståndet mellan O och E är alltså $\sqrt{2-d^2}$.

Problem 6. På ett bord ligger 289 enkronorsmynt och bildar ett kvadratiskt 17×17 -mönster. Alla mynten är vända med krona upp. Vid ett drag får man vända på fem mynt som ligger i rad: lodrätt, vågrätt eller diagonalt. Är det möjligt att efter ett antal sådana drag få alla mynten vända med klave upp?

Lösning: Dela in mynten efter position i fem klasser som markeras med siffrorna 1, 2, 3, 4 och 5 på följande sätt:

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
		-	-	-	-	-	-									
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4

Hur vi än väljer fem mynt som ligger direkt efter varandra i rad: lodrätt, vågrätt eller diagonalt, kommer vi att få ett mynt från var och en av klasserna 1, 2, 3, 4 och 5. När vi genomför vändningsproceduren kommer vi därför att göra lika många vändningar i varje klass. (*)
Av de 289 mynten finns det 58 mynt i var och en av klasserna 1, 2, 3, 4, medan vi har 57 mynt i klass 5. För att få alla mynten vända med klave upp, måste varje mynt vändas ett udda antal gånger. Mynten som befinner sig i klass 1 kommer sammanlagt att vändas ett jämnt antal gånger, eftersom vi har ett jämnt antal mynt i denna position. Detsamma gäller mynten i var och en av klasserna 2, 3 och 4. Däremot kommer mynten som befinner sig i klass 5 att sammanlagt vändas ett udda antal gånger, eftersom vi har ett udda antal mynt i denna klass. Men detta motsäger observationen (*) att antalet myntvändningar är detsamma i varje klass.

Svar: Nej, det är inte möjligt.