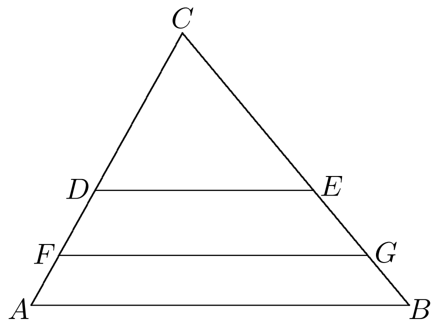
SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 3 oktober 2006

Förslag till lösningar

1. Linjerna DE och FG är båda parallella med linjen AB. De tre områdena CDE, $DFGE$ och $FABG$ har lika stora areor.



Bestäm förhållandet $\frac{CD}{FA}$.

Lösning: Trianglarna CDE och CFG är likformiga. Förutsättningen ger att förhållandet mellan deras areor är $\frac{1}{2}$. Eftersom areaskalan är kvadraten på längdskalan gäller

$$\left(\frac{CD}{CF}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

varav $CD = \frac{1}{\sqrt{2}}CF$. Genom att jämföra trianglarna CDE och CAB får vi på samma sätt

$$\left(\frac{CD}{CA}\right)^2 = \frac{1}{3},$$

så att $CD = \frac{1}{\sqrt{3}}CA$. Alltså är

$$FA = CA - CF = \sqrt{3}CD - \sqrt{2}CD = (\sqrt{3} - \sqrt{2})CD.$$

Vi finner därför att

$$\frac{CD}{FA} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} = \sqrt{3} + \sqrt{2}.$$

Svar: Förhållandet är $\sqrt{3} + \sqrt{2}$.

2. Bestäm $x^2 + y^2 + z^2$ om x, y, z är heltal som uppfyller

$$\begin{cases} x + y + z = 60 \\ (x - 4y)^2 + (y - 2z)^2 = 2\,. \end{cases}$$

Lösning: Heltalskvadraterna i vänsterledet till ekv 2 måste båda vara lika med 1, vilket ger

$$\begin{cases} x &= 4y \pm 1, \\ y &= 2z \pm 1, \end{cases}$$

Här noterar vi att $2 \cdot 2 = 4$ teckenkombinationer är tänkbara. Vi uttrycker x och z i y och får vid insättning i ekv 1:

$$4y \pm 1 + y + \frac{y}{2} \pm \frac{1}{2} = 60$$

eller

$$\frac{11}{2}y \pm 1 \pm \frac{1}{2} = 60,$$

vilket efter multiplikation med 2 ger

$$11y \pm 2 \pm 1 = 120.$$

Detta leder till olikheten

$$117 \leq 11y \leq 123.$$

Men $y = 11$ är det enda heltal som uppfyller olikheten, $11^2 = 121$. Sambandet mellan x och y gör att x måste vara 43 eller 45, medan sambandet mellan z och y gör att z måste vara 5 eller 6. Men då såväl x som y är udda måste z vara jämn för att talens summa ska bli jämn. Vi har alltså $z = 6$ och det följer att $x = 60 - 11 - 6 = 43$. Alla samband är därmed uppfyllda och vi finner att $43^2 + 11^2 + 6^2 = 1849 + 121 + 36 = 2006$.

Svar: Summan av de tre kvadraterna är 2006.

3. Heltalet x uppfyller ekvationen $x^2 = a + x$. Här är a ett heltal större än 2006. Bestäm det minsta möjliga värdet på a samt lös ekvationen för detta värde.

Lösning: Vi skriver ekvationen på formen

$$x(x-1) = a.$$

För heltal $x > 0$ är vänsterledet växande i x, dvs för det minsta möjliga värdet på a måste $x(x-1) > 2006$ samtidigt som $(x-1)(x-2) \leq 2006$. Men $x(x-1) < x^2$ och $(x-1)(x-2) > (x-2)^2$, varför det räcker att kontrollera x-värden som uppfyller $(x-2)^2 < 2006 < x^2$. Kontroll av kvadrater i omgivningen till 2006 visar att

$$43^2 = 1849 < 44^2 = 1936 < 2006 < 45^2 = 2025 < 46^2 = 2116.$$

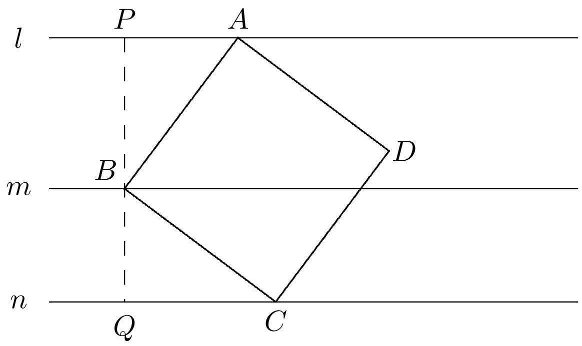
Det räcker alltså att kontrollera heltalen $x = 45$ och $x = 46$. För $x = 45$ är $x(x-1) = 1980$, som dock inte räcker till, medan vi för $x = 46$ får produkten 2070, som uppfyller villkoren.

För heltal $x < 0$ är ekvationens vänsterled avtagande i x, dvs här ska $x(x-1) > 2006$ samtidigt som $x(x+1) \leq 2006$. Eftersom produkterna $x(x-1)$ genomlöper samma värden som för positiva x, måste den minsta produkten som överstiger 2006 fortfarande vara 2070. Men denna produkt får vi nu för $x = -45$.

Svar: Minsta a är 2070 med lösningarna $x = 46$, $x = -45$.

4. De tre räta linjerna l, m, n är parallella. Avståndet mellan l och m är 4, avståndet mellan m och n är 3 och m ligger mellan l och n. En kvadrat, som ligger i området mellan l och n, har tre av sina hörn på var sin linje. Finn kvadratens sidlängd.

Lösning: Först konstaterar vi att kvadratens sida inte kan vara parallell med linjerna, eftersom det då inte är möjligt att få hörn att ligga på alla tre linjerna. Kvadratens diagonaler kan inte heller vara parallella med linjerna, eftersom linjen m ligger på olika avstånd från de övriga linjerna. Kvadraten måste därför vara orienterad på sätt som figuren visar. Låt oss beteckna de fyra hörnen med A, B, C, D enligt figuren. Vi kan utan inskränkning anta att linjen l passerar genom hörnet A, linjen m genom hörnet B och linjen n genom hörnet C.



Vi drar en linje genom B vinkelrätt mot de tre parallella linjerna och kallar denna linjes skärningspunkter med l och n för resp P och Q (det ger att $PB = 4$ och $BQ = 3$). Sätt vinkeln BCQ till α. Vinkeln CBQ blir då $90° - \alpha$, medan vinkeln ABP blir $180° - 90° - (90 - \alpha) = \alpha$. De båda rätvinkliga trianglarna APB och BQC måste då vara likformiga, eftersom deras vinklar är lika. Men de måste också vara kongruenta eftersom de har samma hypotenusa. Vi får att $PA = QB = 3$, dvs triangeln APB har kateterna 3 och 4, varför hypotenusan, och tillika kvadratens sida, blir 5 enligt Pythagoras sats.

Svar: Kvadratens sida har längden 5.

5. Visa att ekvationssystemet

$$\begin{cases} y &= \sqrt{x + \sqrt{1-x}} \\ x &= \sqrt{y - \sqrt{1+y}} \end{cases}$$

saknar reella lösningar.

Lösning: För varje reell lösning (x, y) till systemet måste $x \geq 0$ och $y \geq 0$, ty båda ekvationernas högerled är icke-negativa. Från ekv 1 följer att $x \leq 1$, varav

$$y = \sqrt{x + \sqrt{1-x}} \leq \sqrt{x+1} \leq \sqrt{2}\,.$$

Men vi kan inte ha likhet i båda olikheterna samtidigt, så vi har villkoret

$$y < \sqrt{2}\,. \tag{1}$$

Från ekv 2 följer att $y \geq \sqrt{1+y}$. För $y < 1$ kan denna olikhet inte vara uppfylld, eftersom vi då har $\sqrt{1+y} \geq 1$. Detta medför att $y \geq 1$, varav $\sqrt{1+y} \geq \sqrt{2}$ och vi finner att

$$0 \leq y - \sqrt{1+y} \leq y - \sqrt{2}.$$

För varje rell lösning (x, y) måste alltså villkoret $y \geq \sqrt{2}$ vara uppfyllt, men detta motsäger villkoret (1). Alltså kan ingen reell lösning till systemet existera.

6. På ett bräde med m rader och n kolumner målar man varje ruta svart eller vit. Detta görs så att de m raderna innehåller olika antal (alla positiva) svarta rutor, medan antalet svarta rutor i var och en av de n kolumnerna är konstant. För vilka m och n är detta möjligt?

Lösning : Antag först att $m > n$. Eftersom antalet svarta rutor i en rad är högst n går det inte att bilda mer än n rader med olika antal svarta rutor (vi krävde ju ett *positivt* antal svarta i varje rad). Alltså måste $m \leq n$ för att villkoren ska vara uppfyllda.

Antag nu att $m = n$. I detta fall måste vi ha m rader med olika antal svarta rutor så att antalet svarta är högst m. Men i så fall måste raderna innehålla resp $1, 2, \ldots, m$ svarta rutor. Totala antalet svarta rutor är följaktligen $1 + 2 + \ldots + m = m(m+1)/2$. Antalet svarta rutor i var och en av de m kolumnerna är $(m+1)/2$. Således kan det inte finnas någon lösning om m är ett jämnt tal.

Däremot finns det en lösning om $m = n$, med m udda. Den vänstra figuren nedan illustrerar detta fall. I första raden placerar målar vi den första rutan svart. I den andra raden målar vi rutorna $2, 3, \ldots, m$ svarta. I dessa rader har vi sammanlagt m svarta rutor fördelade över samtliga kolumner. Raderna 3 och 4 bildar på samma sätt ett par med två svarta rutor i rad 3 och $m - 2$ svarta rutor i rad 4, så att vi har exakt en svart ruta i varje kolumn från dessa rader. Vi har $(m-1)/2$ radpar och en avslutande enkelrad. I radpar nr k målar vi de k första rutorna svarta i den ena raden och de $m - k$ sista rutorna svarta i den andra raden. I den avslutande enkelraden målar vi samtliga rutor svarta. I exemplet är antalet svarta rutor i de fyra första raderna resp $1, 4, 2, 3$. I den femte och sista raden målar vi samtliga rutor svarta, vilket ger totalt 3 svarta rutor i varje kolumn och resp $1, 4, 2, 3, 5$ svarta rutor i de fem raderna.

Det finns också alltid en lösning om $m < n$, men här kan m vara såväl udda som jämnt. Den högra figuren llustrerar detta fall. Målningen sker på likartat sätt som i det föregående fallet. I den första raden målar vi den första rutan svart . I den andra raden målar vi rutorna $2, 3, \ldots, n$ svarta. I dessa rader har vi sammanlagt n svarta rutor fördelade över de n kolumnerna. Raderna 3 och 4 bildar på samma sätt ett par med två svarta rutor i rad 3 och $n - 2$ svarta rutor i rad 4. Vi har antingen $m/2$ radpar om m är jämnt, eller $(m-1)/2$ radpar och en avslutande enkelrad med idel svarta rutor om m är udda. I radpar nr k målar vi de k första rutorna svarta i den ena raden och de $n - k$ sista rutorna svarta i den andra raden. I exemplet är antalet svarta rutor i de fyra första raderna resp $1, 5, 2, 4$.

*				
	*	*	*	*
*	*			
		*	*	*
*	*	*	*	*

Fallet $m = n$; udda.

*					
	*	*	*	*	*
*	*				
		*	*	*	*

Fallet $m < n$, m jämnt.

I de båda huvudfallen gäller att om m är ett udda tal kommer följande antal svarta rutor att förekomma: $1, 2, \ldots, (m-1)/2$, samt $n, n-1, \ldots, n-(m-1)/2$. Om m är ett jämnt tal får vi antalen: $1, 2, \ldots, (m/2)$, samt $n-1, n-2, \ldots, n-m/2$. Därmed är det klart att kraven går att uppfylla i de båda fallen.

Svar: Kraven kan uppfyllas för alla (m, n), där $m = n$ och m udda, samt där $m < n$.