

*Kvalificeringstävling den 2 oktober 2007*

1. I en skola har var och en av de 20 klasserna ett studieråd med 5 ledamöter vardera. Per är den ende av pojkarna som får samsas med fyra flickor i sitt råd. Han noterar att det är kvinnlig majoritet i ytterligare 15 av studieråden, trots att det totalt är lika många flickor som pojkar i råden.  
Hur fördelar sig antalet pojkar och flickor i de fyra råd som har manlig majoritet?

2. Två lika långa, cylindriska ljus är gjorda av var sitt material så att brinntiderna är olika. Det ena brinner upp på 4 timmar och det andra på 5 timmar. Ljusen tänds samtidigt. När skall ljusen tändas om man vill att det ena ljuset skall vara dubbelt så långt som det andra klockan 21.00?

3. Sidorna i en triangel har längderna  $a$ ,  $b$  och  $c$ . Vinkeln som står mot sidan med längd  $c$  är  $C$ . Visa att

$$c \geq (a + b) \sin \frac{C}{2}.$$

4. Visa att

$$\frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \geq a + b - ab$$

för alla positiva reella tal  $a$  och  $b$ . När gäller likhet?

5. Vilka funktioner  $f(x)$  uppfyller likheten

$$x(f(x) + f(-x) + 2) + 2f(-x) = 0$$

för alla reella tal  $x$ ?

6. I planet packas cirkelskivor, alla med diameter 1, så att varje cirkel tangerar 6 av de andra cirklarna. För varje par av cirkelskivor saknas gemensamma punkter utöver eventuella tangeringspunkter. Finns det två cirkelskivor vars medelpunkter har avstånd  $\sqrt{2007}$ ?

Skrivtid: 5 timmar

Miniräknare är *inte* tillåtna!

Om några dagar kommer lösningarna att finnas utlagda på nätet under adress  
[www.math.uu.se/~dag/skolornas.html](http://www.math.uu.se/~dag/skolornas.html)