SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 30 september 2008

1. Tre rader med tal är skrivna på ett papper. Varje rad innehåller tre olika positiva heltal. För varje rad bildas summan och produkten av de tre talen. Talen är sådana att de tre radsummorna är lika, medan de tre produkterna är olika; produkten är minst för den första raden och störst för den tredje. Om det är givet att radsumman är den minsta möjliga som kan fås under villkoren ovan, bestäm denna summa och ange för varje rad de tre tal som ingår.

2. Givet är en spetsvinklig triangel. Två cirklar ritas med två av triangelns sidor som diametrar. Visa att en av cirklarnas skärningspunkter ligger på triangelns tredje sida.

3. Bestäm alla positiva heltal $a \leq b \leq c$ sådana att $a^3 + b^3 + c^3 = 2008$.

4. Finn alla icke-negativa lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - yz &= x \\ y^2 - zx &= y \\ z^2 - xy &= z \end{cases} .$$

5. Visa att

$$xy + 2x^2y^2 \leq x^2 + y^2 + xy^3$$

för alla $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.

6. Låt $P_1, P_2, \ldots, P_n$ vara n olika punkter i planet. Man markerar med blå färg mittpunkterna på alla möjliga sträckor mellan skilda punkter, dvs $P_iP_j,\ 1 \leq i < j \leq n$. Vilket är det minsta möjliga antalet olika blå punkter?

Skrivtid: 5 timmar

Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!

Om några dagar kommer lösningarna att finnas utlagda på nätet under adress www.math.uu.se/~dag/skolornas.html