**SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING**
**Svenska matematikersamfundet**

# *Kvalificeringstävling den 26 september 2017*

1. Bestäm alla reella tal $x, y, z$ som uppfyller ekvationerna

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+4}{4} = y \\[2ex] \dfrac{y^2+4}{4} = z \\[2ex] \dfrac{z^2+4}{4} = x \end{cases}$$

2. Tre klasser på en skola har samma antal elever. Totalt är det dubbelt så många flickor som pojkar i de tre klasserna, men i varje klass är båda könen representerade. I den första klassen finns 18 flickor, i den andra finns 8 pojkar, och i den tredje finns det fler pojkar än flickor. Hur många elever går i varje klass?

3. Triangeln $ABC$ är likbent, med sidorna $AB$ och $AC$ lika långa. En cirkel som går genom hörnen $B$ och $C$ skär sidorna $AB$ och $AC$ i punkterna $D$ och $E$, respektive. Givet att sträckorna $BC$ och $CD$ är lika långa, samt att sträckorna $BD$ och $DE$ är lika långa, bestäm vinklarna i triangeln $ABC$.

4. Bestäm alla reella tal $a$, sådana att ekvationen

$$\sqrt{x^2+\frac{1}{x^2}} - \left(x+\frac{1}{x}\right) = a,$$

har minst en reell lösning.

5. En *produktmagisk* kvadrat är ett $3 \times 3$ rutnät där det i varje ruta står olika positiva heltal sådana att produkten av de tre talen i vardera rad, kolumn respektive diagonal är lika med samma tal $N$. Talet $N$ kallas i så fall ett *produktmagiskt* tal.

(a) Ge exempel på en produktmagisk kvadrat.

(b) Hur många produktmagiska tal finns det som är mindre än eller lika med 2017? Motivera!

6. Fem urklippta papperskvadrater (inte nödvändigtvis lika stora) läggs på ett rektangulärt bord så att var och en av deras sidor är parallell med någon av bordets kanter. Det visar sig att det finns (minst) en punkt på bordet som täcks av alla kvadrater. Visa att diagonalernas skärningspunkt i minst en av kvadraterna ligger ovanpå eller under en annan kvadrat.

Skrivtid: 5 timmar
Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!
Lösningarna kommer att finnas utlagda på www.mattetavling.se efter den 31 oktober.