Kvalificeringstävling den 24 september 2013

1. Längs en lång vandringsled finns markeringar för antalet passerade kilometer efter varje kilometer, med början vid starten där det står markering 0. En vandrare som börjar gå vid vandringsledens start ägnar sig åt att räkna siffrorna i dessa markeringar. Hur många kilometer har vandraren gått vid den kilometermarkering som innehåller den 2013:e siffran?

Lösning. De ensiffriga talen bidrar med 10 siffror och motsvarar nio passerade kilometer. De tvåsiffriga innehåller tillsammans 180 siffror. När man passerar skylten med 99, som är det största tvåsiffriga talet, har man gått totalt $9 + 90 = 99$ km. Alla tresiffriga tal tillsammans innehåller $3 \cdot 900 > 2013$ siffror. Alltså har man då man passerar skylten med den 2013:e siffran gått ett tresiffrigt antal kilometer. Vi har

$$2013 = 10 + 180 + 6 \cdot (3 \cdot 100) + 3 \cdot 7 + 2,$$

vilket betyder att man vid skylten med den 2013:e siffran passerat

$$9 + 90 + 6 \cdot 100 + 7 + 1 = 707 \text{ kilometer.}$$

2. I en stad som ligger på gränsen mellan två länder kan man fritt använda ländernas respektive valutor daler och mark. Dag köar bakom två flickor och tre pojkar vid en biograf. Han noterar att flickorna betalar sina båda biljetter med en tiodalerssedel och får åtta mark tillbaka. Pojkarna betalar sina tre biljetter med en trettiomarkssedel och får nio daler tillbaka. Dag lyckas betala för sin biljett med jämna pengar genom att enbart använda endalersmynt och enmarksmynt. Hur många mynt av vardera slaget behöver han för detta?

Lösning. Låt b, d, m vara en biljetts, en dalers och en marks värde, uttryckt i en tredje valuta (till exempel SEK), respektive. Informationen om flickornas och pojkarnas köp av biljetter ger ekvationerna

$$2b = 10d - 8m, \quad \text{och} \quad 3b = 30m - 9d,$$

eller, efter förkortning med 2 respektive 3,

$$b = 5d - 4m, \quad \text{och} \quad b = 10m - 3d$$

Vi vill ha ett uttryck för b på formen $b = km + ld$, där k och l är icke-negativa heltal. Om vi eliminerar b ur de två ekvationerna får vi $8d - 14m = 0$, eller, efter förkortning, $4d = 7m$. Den första ekvationen ger nu

$$b = 5d - 4m = 4d + d - 4m = 7m + d - 4m = 3m + d.$$

Vi ska visa att någon annan myntkombination inte är möjlig. Vi fick att förhållandet $4d = 7m$ måste gälla, alltså gäller $d = \frac{7}{4}m$, $m = \frac{4}{7}d$, och $b = \frac{19}{4}m = \frac{19}{7}d$. Biljetten kan alltså inte köpas med enbart markmynt eller enbart dalermynt. Antag att det finns en annan möjlig myntkombination, $b = km + ld$, där $k, l > 0$. Att det är en annan kombination betyder att $k \neq 3$, och $l \neq 1$, det vill säga $k \neq 3$, och $l > 1$. Men, om $l > 1$, så måste $k < 3$, alltså måste vi ha $k = 1$ eller $k = 2$. För $k = 1$ får vi $b = m + ld = \frac{19}{4}m$, alltså $ld = \frac{15}{4}m = \frac{15}{7}d$, vilket är omöjligt, då l är ett heltal. På samma sätt visas att k inte kan vara 2.

Dag behöver alltså tre enmarksmynt och ett endalersmynt för att köpa sin biljett.

3. Två koncentriska cirklar (det vill säga två cirklar med samma medelpunkt) har radier a och b, där $b > a$. Låt PQ vara en diameter i den större cirkeln. En linje genom Q tangerar den mindre cirkeln i punkten T. Bestäm längden av sträckan PT uttryckt i a och b.

Lösning. Beteckna med O den gemensamma medelpunkten för de två cirklarna, och beteckna med S punkten i vilken linjen QT skär den stora cirkeln (en andra gång). Vi har att $\angle OTQ = 90°$, eftersom QT är tangent och därmed vinkelrät mot radien OT. Samtidigt gäller $\angle PSQ = 90°$, eftersom randvinkeln är hälften så stor som medelpunktsvinkeln på samma båge och PQ är en diameter. Vi får att $OT \| PS$, och att trianglarna PSQ och OTQ är likformiga enligt topptriangelsatsen. Eftersom $|PQ| = 2|OQ| = 2b$, kan vi dra slutsatsen att $|PS| = 2|OT| = 2a$. Pythagoras sats för den rätvinkliga triangeln OTQ ger

$$|SQ| = 2|TQ| = 2\sqrt{b^2 - a^2},$$

så att $|ST| = \sqrt{b^2 - a^2}$. Slutligen använder vi Pythagoras sats en gång till, den här gången för den rätvinkliga triangeln PST, och får

$$|PT| = \sqrt{(2a)^2 + (b^2 - a^2)} = \sqrt{3a^2 + b^2}.$$

Alternativ lösning: Man kan använda cosinussatsen på triangeln PTQ eller triangeln POT. Här följer resonemanget för $\triangle PTQ$: från den rätvinkliga triangeln OTQ får vi att $\cos \angle TQO = \frac{|TQ|}{b} = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}$, vilket tillsammans med $\angle TQO = \angle TQP$ ger

$$|PT|^2 = 4b^2 + |TQ|^2 - 2 \cdot 2b \cdot |TQ| \cdot \frac{|TQ|}{b} = 4b^2 - 3\,|TQ|^2 = 3a^2 + b^2.$$

4. På ett papper har Ida på en rad skrivit 27 positiva heltal, ordnade efter storlek. Det första talet är 1 och det sista är 25. Ida berättar för Emil att summan av samtliga tal är 127, att summan av de nio första talen är 21, samt att summan av de nio sista talen är 65. Räcker den informationen för att Emil ska kunna avgöra vilket tal det är som står i mitten?

Lösning. Låt oss först notera att Ida har skrivit upp 27 tal mellan 1 och 25, vilket betyder att vissa av talen måste vara lika.

Vi börjar med att bestämma summan S_{mitt} av de nio tal som står i mitten, den kommer att vara $S_{\text{mitt}} = 127 - 21 - 65 = 41$. Kalla det första (och därmed minsta) av dessa nio tal för a och det sista (och största) för $a + s, s \geq 0$. Det första och minsta av de sista nio talen måste vara minst $a+s$. Det sista är 25, så att $8(a+s)+25 \leq 65$, och följaktligen gäller $8(a + s) \leq 40$, och $a + s \leq 5$. Om vi istället tittar på de första nio talen, så vet vi att det första av dem är 1, och att de alla kan vara högst a. Det ger $1 + 8a \geq 21$, så att $8a \geq 20$, vilket ger $a \geq 3$ (kom ihåg att a och s är heltal). De nio talen i mitten, och därmed talet i mitten, kan alltså vara $3, 4$ eller 5.

Titta nu på de nio talen i mitten. Summan av de fyra sista av dem kan vara högst 20, så att summan av de fem första måste vara minst 21. Om talet i mitten, det vill säga det största av de fem, är fyra, så kan summan vara högst 20. Talet i mitten måste alltså vara 5. Emil skulle alltså kunna avgöra vilket tal det är som står i mitten med hjälp av den information han får från Ida.

Alternativt kan man resonera sig fram med hjälp av medelvärden. Eftersom medelvärdet av de nio talen i mitten är $\dfrac{41}{9}$, och $4 < \dfrac{41}{9} < 5$, så måste det minsta av de nio vara högst 4 och det största minst 5. Det minsta av de sista nio talen måste då vara minst 5, och eftersom medelvärdet av de åtta första av de nio är 5, så måste alla åtta vara lika med 5. Det största av de nio talen i mitten är alltså 5. Resonemanget fortsätter sedan som ovan.

Det går att hitta 27 tal som uppfyller villkoren i uppgiften, här kommer ett exempel:

$$1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 5, 25.$$

5. Låt a och b vara positiva heltal. Betrakta de ab punkter med heltalskoordinater (i, j) som uppfyller att $0 \leq i < a$, och $0 \leq j < b$. Var och en av dessa punkter färgas i en av k, $k \geq 2$, olika färger som är numrerade från 0 till $k - 1$. I punkten med koordinater (i, j) ges färgens nummer av resten vid heltalsdivision av $i + j$ med k. Om varje färg förekommer i lika många punkter, visa att minst ett av talen a och b är jämnt delbart med k.

Lösning. Antag att k delar varken a eller b. Om vi väljer k på varandra följande punkter i en rad eller i en kolumn, så kommer varje färg att förekomma exakt en gång. Det betyder att vi kan stryka k på varandra följande kolumner eller rader åt gången, och fortfarande få en rektangulär uppsättning av punkter sådan att varje färg förekommer i lika många punkter. Antagandet om icke-delbarhet garanterar att processen kommer att sluta med en uppsättning av cd punkter med koordinater (i, j), där $0 \leq i < c$, $0 \leq j < d$, och $1 \leq c \leq k - 1$, $1 \leq d \leq k - 1$. Varje färg kommer att förekomma högst en gång i varje rad och högst en gång i varje kolumn. I varje rad/kolumn kommer det att fattas minst en färg. Utan inskränkning kan vi anta att kolumnerna inte är färre än raderna, d.v.s. $c \geq d$. Det kommer då att finnas minst en färg som inte fattas i någon rad. Eftersom alla färger förekommer lika många gånger måste det finnas minst $kd > cd$ punkter, vilket är en motsägelse. Motsägelsen visar att minst ett av talen a och b är delbart med k.

6. Punkterna P, Q, R är valda på sidorna BC, CA, AB i en triangel ABC på ett sådant sätt att PQ, QR, RP delar triangeln ABC i fyra likformiga trianglar. Visa att åtminstone två av dessa måste vara kongruenta (det vill säga likformiga och lika stora). Ge också ett exempel (med motivering) som visar att alla fyra inte behöver vara kongruenta.

Lösning. Kalla den ursprungliga triangelns vinklar vid A, B, C för α, β, γ, respektive. Villkoret om likformighet betyder att alla fyra trianglarna är likformiga med den givna triangeln. Vi ska visa att minst två av sträckorna PQ, QR, RP måste vara parallella med sidor i triangeln.

Betrakta först fallet när alla tre vinklarna α, β, γ är olika. Antag att två av sträckorna inte är parallella med sidor i $\triangle ABC$. Utan inskränkning kan vi anta att det är RP och QR. Att RP inte är parallell med CA betyder att $\angle BPR \neq \gamma$; eftersom den inte heller kan vara $\beta = \angle RBP$, får vi att $\angle BPR = \alpha$. Följaktligen har vi $\angle BRP = \gamma$. På samma sätt får vi att $\angle ARQ = \gamma$. Eftersom den givna triangelns tre vinklar är olika medför det att $\angle PRQ$ inte kan vara α eller β om summan av de tre vinklarna $\angle ARQ, \angle PRQ, \angle BRP$ med spets i R ska bli $180°$. Den enda möjligheten är att $\angle PRQ = \gamma = \angle ARQ = \angle BRP\,(= 60°)$. Men då kan ingen av vinklarna med spets i P och Q vara γ, vilket betyder att summan av vinklarna med spets i P och av dem med spets i Q inte kan vara $180°$. Motsägelsen visar att minst två av sträckorna PQ, QR, RP måste vara parallella med sidor i triangeln.

Betrakta nu fallet när två av vinklarna är lika, till exempel $\alpha = \beta$. Triangeln QPC har vinkel γ vid C, alltså måste de två återstående vinklarna vara α, och det följer att $PQ \| AB$. Om QR inte är parallell med BC, får vi att $\angle AQR = \alpha$, $\angle RQP = \gamma$, $\angle QPR = \alpha$, så att $\angle RPB = \gamma$, och $RP \| CA$.

Utan inskränkning kan vi anta att $RP \| CA$ och $PQ \| AB$. Då är fyrhörningen $ARPQ$ en parallellogram, och diagonalen QR delar den i två kongruenta trianglar, och påståendet är bevisat. Om även den tredje sträckan är parallell med motsvarande sida, blir de fyra små trianglarna kongruenta (det inträffar om och endast om P, Q, R är mittpunkter på respektive sida).

Som exempel på ett fall när exakt två av de små trianglarna är kongruenta, betrakta den rätvinkliga triangeln med hörn i punkterna $A(0, 0), B(5, 0), C(0, 10)$. Välj $P(4, 2), Q(0, 2), R(4, 0)$. De fyra små trianglarna är då rätvinkliga med förhållande $2 : 1$ mellan den längre och den kortare kateten. De är alltså likformiga. Fyrhörningen $ARPQ$ är en rektangel som av diagonalen QR delas i två kongruenta rätvinkliga trianglar. Dessa har dock dubbelt så långa sidor som triangeln RBP. Det är alltså exakt två av de fyra trianglarna som är kongruenta. Notera att punkterna B, P, C ligger på den räta linjen med ekvation $2x + y = 10$, det vill säga punkten P ligger verkligen på sidan BC och villkoren i uppgiften är uppfyllda.