**SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING**
**Svenska matematikersamfundet**

# *Kvalificeringstävling den 29 september 2020*

1. Stadens sporthall har renoverats och de tretton ytterdörrarna är nu omväxlande målade vita, röda och blå. Dörrarna är antingen vita på båda sidorna eller tvåfärgade: röda på den ena sidan och vita eller blå på den andra. Exempelvis kan en rödvit dörr vara rödmålad på utsidan och vitmålad på insidan eller omvänt.

Mila funderar över den märkliga färgsättningen och noterar följande:

(1) Det finns dubbelt så många rödblå dörrar som helvita dörrar.

(2) Hos de 13 dörrarna är 10 av de 26 sidorna vita.

Hur många dörrar finns det av varje färgkombination?

2. En liten robot hoppar omkring bland punktformiga öar på en plan oändlig ocean. Öarna är fördelade så att det ligger en ö på varje punkt där båda koordinaterna är heltal. Roboten ställer en gång för alla in en fixerad hopplängd som är ett positivt heltal, och kan därefter börja hoppa runt bland öarna.

Den minimala hopplängden är 2. Finn den minsta hopplängden roboten kan välja om den vill kunna besöka vilken ö som helst. (Om roboten landar i vattnet blir den förstörd och förlorar allt hopp.)

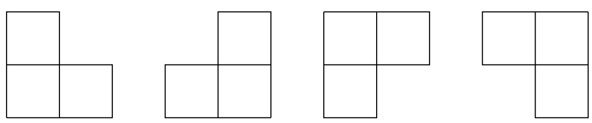
3. De positiva reella talen $a$ och $b$ uppfyller att

$$a\sqrt{a} - (b^2+1)\sqrt{a} = b.$$

Visa att $\sqrt{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{4+b^2}$.

4. Låt $ABC$ vara en triangel med $|AB| > |AC|$. Punkten $D$ ligger på sidan $AB$ och är sådan att $|DB| = |AC|$. Punkten $E$ ligger på triangelns omskrivna cirkel på samma sida om $BC$ som $A$ och är sådan att $|EB| = |EC|$. Visa att $DE$ och $AC$ är parallella om och endast om vinkeln $\angle BAC$ är lika med $60°$.

5. Varje ruta i ett $100 \times 100$ rutnät kan målas i röd, grön eller blå färg. En $L$-formad figur bestående av tre rutor kallas *vacker* om alla tre färgerna förekommer. Bestäm det största möjliga antalet vackra $L$-formade figurer man kan uppnå i rutnätet. (En ruta kan ingå i flera $L$-figurer. $L$-figuren kan roteras, se figur.)



6. Låt $a_0$ vara ett positivt heltal med enbart jämna siffror, det vill säga 0, 2, 4, 6, 8. Definiera $a_n$ för varje positivt heltal $n$ genom att multiplicera $a_{n-1}$ med 3 och sedan ta bort alla udda siffror från resultatet (ordningsföljden på de resterande siffrorna ändras inte). Visa att det finns två olika positiva heltal $m$ och $n$ sådana att $a_n = a_m$.

Skrivtid: 5 timmar
Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!
Lösningarna kommer att finnas utlagda på www.mattetavling.se efter den 5 november.