

Kvalificeringstävling den 27 september 2022

1. Filip ställer tio frågor till Cecilia om hennes lyckotal:

- Är det delbart med 1?
- Är det delbart med 2?
- ...
- Är det delbart med 10?

Svaret blir "ja" på alla frågor utom en, då Cecilia svarar "nej, de har inte ens någon gemensam faktor utom 1". Vilken av frågorna besvarade Cecilia på detta sätt?

2. Alice studerar tre fotografier där hon och hennes syskon är avbildade. På det första kortet, taget på nyårsdagen 2010, finns alla syskonen med utom Alice själv som då ännu inte var född. På det andra kortet, från nyårsdagen 2015, ser man Alice tillsammans med alla hennes syskon. På det tredje, från nyårsdagen 2022, finns hela syskonskaran med undantag av Noah som hade flyttat hemifrån innan det kortet togs.

På baksidan av korten har Alice noterat summan av syskonens åldrar vid tillfället (i hela tal) för de syskon som finns med på fotot. På det första kortet är summan 36, på det andra 64 och på det tredje 82 år.

Hur många syskon är det totalt och hur gammal var Noah på nyårsdagen 2022?

3. En kortlek består av 2022 kort, numrerade $1, 2, \dots, 2022$. Vissa kort är röda, de övriga är blå. Låt M vara det största av talen på de blå korten och m det minsta av talen på de röda korten. Man vet att $M = 2b$, där b är antalet blå kort, och att $m = \frac{r}{4}$, där r är antalet röda kort. Dessutom vet man att hälften av talen på de röda korten är större än M , hälften är mindre än M .

Hur många av talen på de blå korten är större än m ?

4. Bestäm alla heltal k för vilka det finns tre positiva heltal a, b, c sådana att

$$(a + b + c) \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right) = 9 + \frac{k}{abc}.$$

5. Punkten M är mittpunkt på sidan BC i triangeln ABC . Punkten P på sidan AB är sådan att $|BP| = 2|AP|$ och $|PM| = |AP|$. Visa att $|BC| = 2|AC|$.

6. En trappa har tio trappsteg. Xerxes klarar att ta högst två steg i taget, antingen uppåt eller nedåt. På hur många sätt kan han komma uppför trappan utan att besöka samma nivå två gånger?

Skrivtid: 5 timmar

Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!

Lösningarna kommer att finnas utlagda på www.mattetavling.se efter den 5 november.