

SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING  
Svenska matematikersamfundet

*Kvalificeringstävling den 26 september 2023*

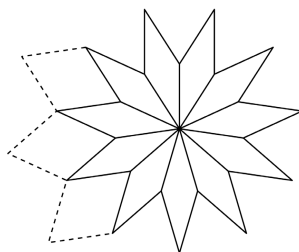
1. Dag köper äpplen och päron på torget. Han fyller en påse med de båda sorterna och får veta att priset är 137 centavos. För dyrt, tycker Dag och tar bort tre äpplen och ett päron från påsen. Priset är nu nere i 114 centavos, men Dag är fortfarande inte helt nöjd. Han plockar därför bort frukter av den ena sorten (enbart) tills påsen innehåller lika många äpplen som päron. Nu är han nöjd och får sin påse för 104 centavos. Styckepriserna för frukterna är heltal och själva påsen är gratis.

Vilka var styckepriserna för de båda frukterna?

2. Fyra vänner skriver var sitt ensiffrigt tal (ett tal mellan 0 och 9) på en pappersbit. De väljer inte nödvändigtvis olika tal. Det visar sig att produkten av de fyra talen är ett kubiskt tal. Bestäm alla möjliga värden för denna produkt.

3. Anna och Peter spelar följande spel. Innan de börjar skrivs några heltal på tavlan. I ett drag kan man byta två jämna tal mot deras summa eller två udda tal mot deras produkt. Den förste som inte kan göra ett drag förlorar. Anna börjar. För vilka startuppsättningar av heltal har Anna en vinnande strategi?

4. Låt  $n \geq 5$  vara ett heltal och bilda en geometrisk figur som består av romber med sidan 1 längdenhet på följande sätt. Börja med  $n$  kongruenta romber som bildar en stjärna. Fortsätt genom att successivt lägga till lager av kongruenta romber som fyller upp rummet mellan intilliggande romber i föregående lager. Varje romb som läggs till kommer att ha en gemensam sida med två av romberna i föregående lager. Processen slutar när det inte längre går att lägga till fler lager. Hur många romber (som funktion av  $n$ ) innehåller figuren när processen slutar?



5. Vinkeln vid  $C$  i  $\triangle ABC$  är  $45^\circ$  och vinkeln vid  $A$  är spetsig. Sträckorna  $BD$  och  $CE$  är höjder i triangeln ( $E \neq B$ ). Punkten  $F$  på sidan  $AB$  är sådan att  $DF$  är vinkelrät mot  $AB$ . Visa att om  $|CE| + |BE| = 2|DF|$  så är vinkeln vid hörnet  $A$  mindre än  $45^\circ$  och omvänt, om vinkeln vid hörnet  $A$  är mindre än  $45^\circ$  så gäller  $|CE| + |BE| = 2|DF|$ .

6. Bestäm alla polynom  $P(x) = ax^2 + bx + c$  med heltalskoefficienter  $a, b, c$ , där  $a \neq 0$ , sådana att

$$\frac{P(x-1)P(1-x)}{P(x)}$$

är ett heltal för alla heltal  $x$  för vilka  $P(x) \neq 0$ .

Skrivtid: 5 timmar

Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!

Lösningarna kommer att finnas utlagda på [www.mattetavling.se](http://www.mattetavling.se) efter den 5 november.