SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 28 september 2021

1. En dubbelspårig järnvägslinje trafikeras av två tåg, A och B, som framförs på var sitt spår i bägge riktningar. Tåget A är 380 meter långt och är snabbare än tåget B som har längden 420 meter. Vart och ett av tågen kör med konstant hastighet.

När tågen går i samma riktning kan det hända att A ligger efter B men kommer ifatt B och kör om. Hela omkörningen tar då exakt 2,5 minuter. När tågen går i olika riktning passerar de varandra helt och hållet på exakt 40 sekunder.

En järnvägsfantast står och tittar på tågen. Hur lång tid tar det för tåget A att passera honom?

2. För ett positivt heltal kan vi bilda mängden av alla *deltal* som kan fås genom att välja ut några av siffrorna, i samma ordning som i det ursprungliga talet, och läsa dem som ett tal. Exempelvis får vi de sex deltalen $3, 7, 37, 33, 73$ och 373 från talet 373. Bestäm alla positiva heltal vars samtliga deltal är primtal.

3. Finn alla reella lösningar till ekvationen

$$x^{2021} + 2021x^{2020} + 2021x^{2019} + \cdots + 2021x + 2020 = 0.$$

4. Låt n vara ett positivt heltal. En stapel med $3n$ likadana mynt ligger på ett bord, vart och ett med antingen sidan 'klave' uppåt eller sidan 'krona' uppåt. Stapeln kan ordnas om (ett 'drag') genom att ta den delstapel som de m översta mynten utgör (där $1 \leq m \leq 3n$) och vända hela denna delstapel upp och ned. Visa att man oavsett utgångsläge, med detta sätt att ordna om stapeln, kan uppnå varje tänkbar följd av 'krona' och 'klave' i stapeln med högst $4n - 1$ drag.

5. En följd $a_1, a_2, \ldots$ av positiva heltal uppfyller rekursionen $a_{n+1} = a_n + \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor + \lceil \sqrt{a_n} \rceil$ för alla $n \geq 1$. Visa att det finns ett polynom $P(x)$ så att $a_n = P(n)$ för alla $n > 1$.

Anmärkning. $\lfloor x \rfloor$ är det största heltal som är mindre än eller lika med x, och $\lceil x \rceil$ är det minsta heltal som är större än eller lika med x.

6. Låt ABC vara en triangel. Låt P vara en punkt på sidan AB och Q vara en punkt på sidan AC sådana att $|PC| + |CQ| = |PB| + |BQ|$. Visa att det finns en punkt som ligger på samma avstånd från linjerna AB, AC, PC och QB.

Skrivtid: 5 timmar
Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!
Lösningarna kommer att finnas utlagda på www.mattetavling.se efter den 5 november.