SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 2 oktober 2018 - lösningar

1. Lina har mynt av fyra olika slag: guld, silver, brons och koppar. Alla mynt av samma slag väger lika mycket, och alla vikter är hela gram. Lina utför två vägningar.

I den första vägningen tar hon 6 mynt av guld, 13 av silver, 3 av brons och 7 av koppar och noterar att vikten är 162 g. I den andra vägningen tar Lina 15 guldmynt, 5 silvermynt och 11 bronsmynt och får vikten 110 g.

Vad väger varje mynt av de fyra myntslagen?

Lösning. Låt vikterna för ett mynt av guld, silver, brons, koppar vara g, s, b, k respektive. De två vägningarna ger ekvationssystemet

$$\begin{cases} (1) \quad 6g + 13s + 3b + 7k = 162, \\ (2) \quad 15g + 5s + 11b = 110. \end{cases}$$

Av (2) ser vi att $11b$ och därför också b är delbart med 5, $b = 5t$ säg. Den andra ekvationen kan då förenklas till $3g + s + 11t = 22$. Här måste $t = 1$, eftersom g, s och t är positiva, och vi får att $b = 5$. Alltså är

$$(3) \ \ 3g + s = 11,$$

vilket ger tre möjligheter: $(g, s) = (1, 8), (2, 5), (3, 2)$. Insättning av $b = 5$ i den första ekvationen gör att den övergår i

$$(4) \ \ 6g + 13s + 7k = 147,$$

där $6g+13s$ måste vara delbart med 7; detsamma måste gälla $(7g+14s)-(6g+13s) = g + s$. Av de tre fallen i (3) är det bara $(g, s) = (2, 5)$ som fungerar, $g + s = 7$.

Vi har alltså $g = 2$, $s = 5$, $b = 5$ samt ur (1) $7k = 70$, dvs $k = 10$.

2. Hitta alla primtal p och q, som uppfyller att $p^q + q^p$ är ett primtal.

Lösning. Det minsta primtalet är 2, vilket betyder att $p, q \geq 2$. Det nya primtalet som bildas måste alltså vara större än 8 (större än eller lika med 11), och är därför udda. Summan av två udda tal är jämn, och summan av två jämna tal är också jämn. Det betyder att exakt ett av talen p och q måste vara jämnt. Det enda jämna primtalet är 2. Låt oss anta att $p = 2$. Vi ska alltså nu hitta ett primtal q så att $2^q + q^2$ är ett primtal. Vi ser att $q = 3$ är en lösning, då $3^2 + 2^3 = 17$ är ett primtal.

Vi ska visa att det är den enda möjligheten. Av $2 = 3 - 1$ och av att q är udda, följer att $2^q = 3 \cdot (\text{ett heltal}) - 1$. Om q är ett primtal som inte är 3, så följer att $q = 3 \cdot$ (ett heltal) $+ 1$, eller $q = 3 \cdot$ (ett heltal) $- 1$. I båda fallen gäller att $q^2 = 3 \cdot$ (ett heltal) $+ 1$, och vi får att summan $2^q + q^2$ inte kan vara ett primtal, eftersom den är delbar med 3.

Därmed har vi visat att $(2,3)$ och $(3,2)$ är alla lösningar för (p,q).

3. På svarta tavlan står talen $1, 2, \ldots, n$, för ett visst positivt heltal n. Kim suddar ut två på varandra följande tal, lägger ihop de tal som står kvar och får summan till 2018. Visa att det bara finns ett enda värde på n för vilket detta är möjligt, och bestäm det värdet.

Lösning. Summan av de n talen är lika med $s_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Summan av två på varandra följande heltal är alltid udda, vilket betyder att s_n måste vara ett udda tal. Det medför att varken n eller $n+1$ kan vara delbara med 4.

De minsta talen Kim kan ha suddat ut är 1 och 2, de största är $n-1$ och n. Den observationen ger olikheterna

$$\frac{n(n+1)}{2} - (2n-1) = \frac{n^2-3n+2}{2} \leq 2018 \leq \frac{n(n+1)}{2} - 3 = \frac{n^2+n-6}{2} < \frac{n(n+1)}{2}.$$

Man kontrollerar att $s_{63} = 2016$, så $n \geq 64$. Talet 64 är dock delbart med 4, så det första talet vi behöver undersöka är $n = 65$. Vi har

$$s_{65} - 2018 = \frac{65 \cdot 66}{2} - 2018 = 65 \cdot 33 - 2018 = 2145 - 2018 = 127 = 63 + 64.$$

Därmed har vi visat att $n = 65$ är en lösning. Vi behöver visa att det inte finns någon annan lösning. Insättning av $n = 66$ i den vänstra olikheten ger att denna inte uppfylls, eftersom

$$\frac{66^2 - 3 \cdot 66 + 2}{2} = 2080 > 2018.$$

Funktionen $n^2 - 3n + 2 = n(n-3) + 2$ är växande för $n > 3$, så vänsterledet kommer att bli större och större när n växer. Därmed kan det inte finnas lösningar som är större än 66, och vi är klara.

4. Låt AB vara en korda i en cirkel med medelpunkt O. Linjen l går genom O och skär kordan AB i punkten P. Låt C vara spegelbilden till punkten B i linjen l. Visa att punkterna A, C, O och P ligger på en cirkel.

Lösning. Fyrhörningen är degenererad till en triangel eller en sträcka i följande fall: när linjen l är mittpunktsnormal till AB (då är $C = A$), när AB är en diameter (då är $P = O$), och när l går genom A eller B. I alla de fallen gäller slutsatsen.

Antag nu att fyrhörningen inte är degenererad. Notera att linjen l skär både sträckan AB och sträckan BC, vilket betyder att A och B ligger på olika sidor om linjen l, och B och C ligger på olika sidor om linjen l. Därmed ligger A och C alltid på samma sida om linjen l. Dessutom, eftersom C är speglingen av B i en linje genom O gäller $OC = OB$, och vi får att även C ligger på den givna cirkeln.

Låt N vara fotpunkten av normalen genom A mot linjen l. Om P ligger utanför sträckan ON ($PA > PB$) bildas fyrhörningen $ACPO$, om P ligger på sträckan ($PA < PB$) bildas fyrhörningen $ACOP$. Beviset nedan fungerar i båda fallen.

Punkten P ligger på mittpunktsnormalen till BC, så att $PC = PB$, och $\angle PBC = \angle PCB$. Enligt yttervinkelsatsen har vi $\angle APC = \angle PBC + \angle PCB = 2\angle ABC$. Enligt medelpunktsvinkelsatsen gäller $\angle AOC = 2\angle ABC$. Vi har alltså att $\angle APC = \angle AOC$, och det följer enligt randvinkelsatsens omvändning att $AOPC$ är inskriven.

Alternativ lösning: Vi utgår här från att O och P inte sammanfaller (det vill säga, AB är inte diameter i cirkeln). Då har vi

$$\angle OAP = \angle OAB = \angle OBA = \angle OBP = \angle OCP,$$

och vi får att fyrhörningen som bildas är inskriven. Den andra likheten gäller eftersom $\triangle AOB$ är likbent, den sista eftersom $\triangle OBP$ speglas på $\triangle OCP$.

5. Man tillverkar en sorts godishalsband som består av godisbitar i tre olika färger. Godisbitarna är ordnade så att det aldrig är två bitar med samma färg bredvid varandra. Avgör om man alltid genom äta en godisbit i taget kan äta upp alla utan att det någonsin är två bitar med samma färg bredvid varandra.

Lösning. Ja, det kan man.

Observera att (ett jämnt antal) godisbitar med två färger, a och b, kan ordnas så att inga godisbitar med samma färg sitter bredvid varandra. Konfigurationen är då att varannan godisbit har färg a, och varannan godisbit har färg b. Om antalet godisbitar är strikt större än två kan man då inte äta någon godis utan att göra så att två godisbitar med samma färg hamnar bredvid varandra.

Observationen leder till att man inte vill att någon färg ska ta slut förrän det är precis en bit kvar av varje färg. Vi vill därför visa att man i varje läge kan välja att äta en godis som

- inte är den sista av den färgen, om det inte är precis en godisbit av varje färg kvar;
- inte gör att två godisbitar med samma färg hamnar bredvid varandra.

När det är tre godisbitar med tre olika färger kvar kan de ätas i godtycklig ordning, så om de två villkoren ovan kan uppfyllas följer det genom induktion att det alltid är möjligt att äta godisbitarna ”i god ordning”.

Vi antar därför att vi har fyra eller fler godisbitar kvar och att alla tre färger finns kvar, och vi söker en godisbit som uppfyller villkoren. Antag att det inte finns något ställe på halsbandet där det förekommer tre godisbitar av olika färg i rad. Låt oss börja med två intill liggande bitar som har färg ab och röra oss åt samma håll längs halsbandet. Enligt antagandet kan nästa bit inte kan vara c, så den måste vara a. Biten efter kan inte vara c, för det skulle leda till förekomsten av bac, så den måste vara b, och så vidare. Antagandet skulle följaktligen leda till att vi får ett halsband med endast två färger. Eftersom alla färger förekommer och två i rad aldrig har samma färg, kommer det alltså någonstans på halsbandet att finnas tre godisbitar av olika färg i rad, säg abc. Om mer än en bit är färgad b kan vi äta den mellersta av dessa tre. Om inte, är b den sista av sin färg och vi kan äta någon av grannarna till den utan att det kan vara den sista av den färgen eftersom vi har fler än tre godisbitar på halsbandet.

6. Ett visst carambolebord (biljardbord utan hål) är kvadratiskt med sida s (längdenheter). En boll, som är ensam på bordet, stöts och får studsa högst n gånger i bordets kanter, där n är ett ickenegativt heltal. Visa att bollen inte kan färdas längre än $s\sqrt{n^2+2n+2}$ (längdenheter) efter en stöt. (En studs i ett hörn räknas, som vanligt i carambole, som två studsar i bordskanter. Att spela med skruv är inte tillåtet.)

Lösning. Vi antar att bollens radie är försumbar. (Det är OK, ty om köbollen har radie $r > 0$ fungerar det som om den hade radie 0 på ett bord med sida $s - 2r$, där stötarna blir kortare än om sidan är s och radien 0.)
Låt bordet utgöras av kvadraten med motstående hörn i $H_1 = (0, 0)$ och $H_2 = (s, s)$ i xy-planet. Antag att ℓ är längden av en stöt med n vallstudsar där köbollen initialt ligger i punkten P och har sin första vallträff i $Q \neq P$. Förläng PQ till en sträcka PR (det vill säga, Q ligger på PR) med längd ℓ. Utan förlust av generalitet kan vi anta att R:s koordinater är positiva. Eftersom bollen träffat n vallar kommer R att ligga i en kvadrat som har motstående hörn $H_1' = (as, bs)$ respektive $H_2' = ((a+1)s, (b+1)s)$ för ickenegativa heltal a och b med $a + b = n$. Vi har $|PR| \leq |H_1 H_2'|$ och alltså gäller

$$\ell \leq s\sqrt{(a+1)^2 + (b+1)^2} = s\sqrt{2\left(a - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{(n+2)^2}{2}}$$

som är som störst då $a = 0$ eller $a = n$. Båda fallen ger den sökta övre gränsen för ℓ.

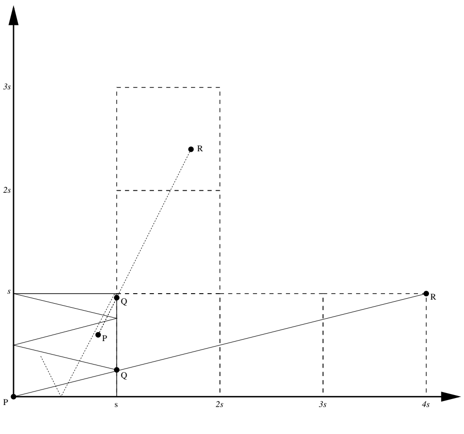

Figure 1: Illustration av beviset då $n = 3$. En stöt med maximal längd (heldragen) samt en lite kortare (streckad).