SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 27 september 2011

Förslag till lösningar

1. En medeltida stad är omgiven av en hög stadsmur. Muren består av raka partier som i hörnen bildar räta vinklar med varandra. På dess ovansida finns en väg som inte skär sig själv och som regelbundet patrulleras av vakter. Det är känt att en vakt börjar och slutar sin runda på samma ställe mitt på ett rakt parti (mitt emellan två hörn), att han vid sin rundvandring hela tiden har staden på sin vänstra sida, samt att han svänger höger 30 gånger. Hur många gånger svänger han vänster?

Lösning 1: Villkoret att vakten hela tiden har staden på sin vänstra sida betyder att han går moturs under sin vandring. En vänster- och en högersväng tillsammans ger ingen nettoändring i vaktens riktning. För att komma tillbaka till startpunkten behöver han svänga vänster fyra gånger netto. Alltså behöver vakten dels 30 vänstersvängar för att kompensera de 30 högersvängarna, dels fyra vänstersvängar för att komma runt, så han svänger vänster 34 gånger under en runda.

Efter en högersväng kan man återställa riktningen även genom att svänga höger tre gånger till; man kan dock inte komma runt på det viset, i och med kravet att vägen inte skär sig själv. Det är dock svårt att ge ett stringent bevis för detta, och vi avstår från det.

Om vakten gör 30 högersvängar på n rundor, så kommer han att behöva göra $30+4n$ vänstersvängar; här måste n vara en delare till 30.

Lösning 2: Under sin rundvandring går vakten moturs längs en n-hörning med vinklar 90° och 270°. Varje högersväng motsvarar en 270°-vinkel, och varje vänstersväng motsvarar en 90°-vinkel. Summan av alla vinklar i en n-hörning är $(n-2)\cdot 180°$. Om vakten svängt höger 30 gånger, så har han svängt vänster $n-30$ gånger. För n-hörningens vinkelsumma får vi då

$$(n-2)\cdot 180° = (2n-4)\cdot 90° = 30\cdot 270° + (n-30)\cdot 90° = (30\cdot 3+n-30)\cdot 90° = (n+60)\cdot 90°,$$

vilket ger ekvationen $2n-4=n+60$ för n. Ur den får vi att $n=64$, vilket betyder att vakten svänger vänster $64-30=34$ gånger under en runda.

Den andra lösningens skenbara enkelhet beror på att man använder formeln för vinkelsumman i en n-hörning. Denna formel är dock inte lätt att bevisa för en godtycklig icke-konvex n-hörning.

2. Antalet elever i en gymnasieskola är 1300. Vissa elever sjunger i skolkören, medan somliga elever tränar friidrott. En fjärdedel av dem som tränar friidrott sjunger även i kören, medan andelen elever som tränar friidrott bland dem som sjunger i kören är fyra gånger så stor som andelen elever som tränar friidrott bland dem som inte sjunger i kören. Hur många elever sjunger i skolans kör?

Lösning: Låt f vara antalet elever som tränar friidrott, låt x vara antalet elever som sjunger i kören, och beteckna slutligen med s antalet elever som både sjunger i kören och tränar friidrott. De givna villkoren kan då skrivas som

$$s = \frac{f}{4}, \qquad \frac{s}{x} = 4 \cdot \frac{f-s}{1300-x}\,.$$

Vi har alltså att $f = 4s$, och division av båda leden i den andra likheten med s ger

$$\frac{1}{x} = \frac{4(4s-s)}{s(1300-x)} = \frac{12}{1300-x}\,,$$

vilket ger $12x = 1300 - x$, och slutligen $x = 100$.

3. Finn alla reella lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x + y - z &= 2, \\ x^2 + y^2 - z^2 &= 0, \\ xyz &= 60. \end{cases}$$

Lösning: Ur den första ekvationen får vi $x + y = 2 + z$, vilket medför $x^2 + y^2 = 4 + 4z + z^2 - 2xy$. Det är uppenbart att det inte finns lösningstriplar med $z = 0$, så att den sista ekvatinen ger $xy = \dfrac{60}{z}$. Vi kan nu sätta in $x^2 + y^2 = 4 + 4z + z^2 - \dfrac{120}{z}$ i den andra ekvationen, och får

$$4 + 4z + z^2 - \frac{120}{z} - z^2 = 0,$$

vilket ger en andragradsekvation för z

$$z^2 + z - 30 = 0,$$

med lösningar $z_1 = 5$ och $z_2 = -6$. Var och en av dessa två lösningar ger ett ekvationssystem för x och y.

För $z_1 = 5$ får vi

$$x + y = 7, \qquad xy = 12,$$

som har lösningarna $x_1' = 3,\ y_1' = 4$, och $x_1'' = 4,\ y_1'' = 3$.

För $z_2 = -6$ får vi

$$x + y = -4, \qquad xy = -10,$$

som har lösningarna $x_2' = -2 + \sqrt{14},\ y_1' = -2 - \sqrt{14}$, och $x_2'' = -2 - \sqrt{14},\ y_2'' = -2 + \sqrt{14}$.

Eftersom vi bl.a. kvadrerat under lösningens gång, måste vi sätta in lösningarna och verifiera att det verkligen handlar om lösningar till det ursprungliga systemet. Vi gör det med lösningstrippeln $(-2-\sqrt{14}, -2+\sqrt{14}, -6)$ och överlämnar övriga åt läsaren (observera att man kan använda symmetri för att slippa räkna mycket):

$$\begin{aligned}
&xyz = (4-14)(-6) = 60;\\
&x+y-z = -2-\sqrt{14}-2+\sqrt{14}-(-6) = 2;\\
&x^2+y^2-z^2 = 4-2\sqrt{14}+14+4+2\sqrt{14}+14-36 = 0.
\end{aligned}$$

Det visar sig att alla fyra tripplarna är lösningar till det ursprungliga systemet, alltså har systemet lösningarna $(3,4,5), (4,3,5), (-2+\sqrt{14}, -2-\sqrt{14}, -6), (-2-\sqrt{14}, -2+\sqrt{14}, -6)$.

4. I fyrhörningen $ABCD$ är $|AC| = 2|BC|$. Vidare gäller $\angle ABD = \angle DBC = \angle DAC$. Man vet att $\angle ADC = 90°$. Bestäm fyrhörningens övriga vinklar.

Lösning 1: Likheten $\angle DAC = \angle DBC$ medför enligt omvändningen till randvinkelsatsen att fyrhörningen $ABCD$ är inskriven (d.v.s. att de fyra punkterna A, B, C, D ligger på en cirkel). Randvinkeln $\angle ADC$ är rät, vilket betyder att AC är diameter i den omskrivna cirkeln, vilket i sin tur ger att även $\angle ABC$ är rät. Triangeln ABC är alltså rätvinklig med rät vinkel vid B, och med en katet, BC, som är hälften så lång som hypotenusan AC. Vi kan då dra slutsatsen att $\angle BAC = 30°$, och $\angle BCA = 60°$ (det rör sig om "en halv liksidig triangel"). Ur villkoret för vinklarna får vi att $\angle ABD = \angle DBC = \frac{1}{2}\angle ABC = 45° = \angle DAC$, så att $\angle DAB = 45° + 30° = 75°$, $\angle ABC = 90°$, och $\angle BCD = 360° - 75° - 2\cdot 90° = 105°$.

Lösning 2: Inför beteckningen $\varphi = \angle DBC = \angle DBA = \angle DAC$. Förläng sträckan CB till CE så att $|CE| = 2|CB| = |CA|$. Ur $\triangle ACD$ har vi $|CD| = |CA|\sin\varphi = 2|BC|\sin\varphi$. Sinussatsen för $\triangle DCB$ ger $\dfrac{|CD|}{\sin\varphi} = \dfrac{|BC|}{\sin\angle CDB}$. Tillsammans ger de två likheterna att $\sin\angle CDB = \frac{1}{2}$, och eftersom $\angle CDB < \angle CDA = 90°$, får vi att $\angle CDB = 30°$, och $\angle BDA = 60°$. Nu kan vi ur $\triangle DAB$ beräkna $\angle CAB = 180° - 60° - 2\varphi = 120° - 2\varphi$. Om vi tittar på $\triangle ABC$, ser vi att $\angle ACB = 180° - 2\varphi - (120° - 2\varphi) = 60°$. Det betyder att triangeln ACE inte bara är likbent, utan även liksidig. Då kan vi dra slutsatsen att medianen AB mot sidan CE även är höjd mot CE, så att $\angle ABC = 90°$. Lösningen avslutas som ovan.

5. Vi säger att varje positivt heltal N har en familj som består av N samt alla positiva heltal man kan få genom att ordna om N:s siffror, utom dem som vid omordningen får en nolla som första siffra. (T.ex. har talet 101 familjen $\{101, 110\}$.) Vi säger också att N:s familj gillar det positiva heltalet p om N eller något annat tal i familjen är delbart med p. (Alla tal som familjen ovan gillar är 1,2,5,10,11,22,55,101,110.) Bestäm alla tresiffriga tal vars familjer gillar samtliga udda tal mindre än 12.

Lösning: Ett tal, skrivet i positionssystem mad basen 10, är delbart med 9 om och endast om summan av dess siffror är delbar med 9. Eftersom minst ett tal i var och en av de efterfrågade familjerna är delbart med 9, och eftersom siffersumman inte ändras när man ordnar om siffrorna, får vi att alla tal i dessa familjer måste vara delbara med 9. Dessutom måste något tal i varje sådan familj vara delbart med 11, alltså har varje familj en representant som är delbar med 99. Talen måste vara tresiffriga, så vi måste undersöka familjerna som genereras av 198, 297, 396, 495, 594, 693, 792, 891, 990. Eftersom en representant i varje familj måste vara delbar med 5, är det bara de tal som innehåller 5 och/eller 0 som är intressanta. Vi behöver alltså endast undersöka familjerna som genereras av 495 och 990 (talen 495 och 594 tillhör samma familj). Vi vet redan att dessa familjer gillar $3, 5, 9, 11$. Talet 945 är delbart med 7, så familjen $\{495, 459, 549, 594, 945, 954\}$ uppfyller de ställda kraven. Talet 990 har en familj som består av $990, 909$. Inget av dessa två tal är delbart med 7. Den enda familjen av tresiffriga tal som gillar alla udda tal, mindre än 12, är alltså $\{495, 459, 549, 594, 945, 954\}$. Den genereras av vilket som helst av sina element.

6. Är det möjligt att dela upp de positiva heltalen i två oändliga mängder A och B som inte har något tal gemensamt och som är sådana att summan av 2011 godtyckligt valda olika tal från A ligger i A och summan av 2011 godtyckligt valda olika tal från B ligger i B? Vad blir svaret om man på båda ställena byter ut 2011 mot 2012?

Lösning: Det är möjligt för 2011: välj $A = \{$alla jämna positiva tal$\}$, och $B = \{$alla udda positiva tal$\}$. Summan av ett godtyckligt antal jämna tal är ett jämnt tal, medan summan av ett udda antal udda tal är ett udda tal. Påståendet följer, eftersom 2011 är udda.

Vi ska visa att det inte är möjligt om man byter ut 2011 mot 2012. Låt oss anta motsatsen. Vi ska först visa att oavsett hur man väljer A och B, så finns det oändligt många par av tal $x, x+1$ och $y, y+1$ sådana att x ligger i A, $x+1$ i B; y ligger i B, $y+1$ i A. För varje a i A finns b i B sådant att $b > a$, eftersom mängden B är oändlig. Välj b som det minsta elementet i B som är större än a; då är det så att $x = b - 1$ tillhör A, medan $x + 1 = b$ tillhör B. Eftersom A också är oändlig, finns ett element i A som är större än b, och vi kan upprepa processen för att få oändligt många par av typen $x, x+1$. Exakt samma resonemang gäller om vi tar ett element ur B som utgångspunkt. Vi kan alltså välja tal $a_1, a_2, \ldots, a_{2012}$ i A, och $b_1, b_2, \ldots, b_{2012}$ i B, så att $b_1 = a_1 + 1, b_3 = a_3 + 1, \ldots b_{2011} = a_{2011} + 1$, medan $b_2 = a_2 - 1, b_4 = a_4 - 1, \ldots, b_{2012} = a_{2012} - 1$. Enligt vårt antagande måste $a = a_1 + a_2 + \cdots + a_{2012}$ tillhöra A, och $b = b_1 + b_2 + \cdots + b_{2012}$ måste tillhöra B, men det är omöjligt, eftersom konstruktionen medför att $a = b$, och det var givet att A och B saknar gemensamma element. Motsägelsen visar att en uppdelning med egenskaperna som beskrivs i uppgiften inte är möjlig för 2012.