SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 26 september 2017

1. Bestäm alla reella tal x, y, z som uppfyller ekvationerna

$$\begin{cases} \dfrac{x^2+4}{4} = y \\[2ex] \dfrac{y^2+4}{4} = z \\[2ex] \dfrac{z^2+4}{4} = x \end{cases}$$

Lösning 1. Addera ekvationerna ledvis och flytta alla termer till vänsterledet. Vi får då att

$$\frac{x^2+4}{4} + \frac{y^2+4}{4} + \frac{z^2+4}{4} - y - z - x =$$

$$= \frac{(x^2-4x+4)+(y^2-4y+4)+(x^2-4z+4)}{4} = 0,$$

vilket kan skrivas som

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 0.$$

Summan av tre reella tals kvadrater kan endast vara lika med noll om alla tre talen är lika med noll. Det följer alltså att $x = y = z = 2$. Insättning av $x = y = z = 2$ i de ursprungliga ekvationerna visar att detta verkligen är en lösning, som därmed är den enda lösningen.

Lösning 2. Det är uppenbart att $x, y, z > 0$, vilket medför att vänsterleden är växande funktioner av respektive variabel. På grund av symmetrin kan vi utan inskränkning anta att x är det minsta av de tre talen, det vill säga $x \leq y,\ x \leq z$. Det följer nu att

$$y = \frac{x^2+4}{4} \leq \frac{z^2+4}{4} = x,$$

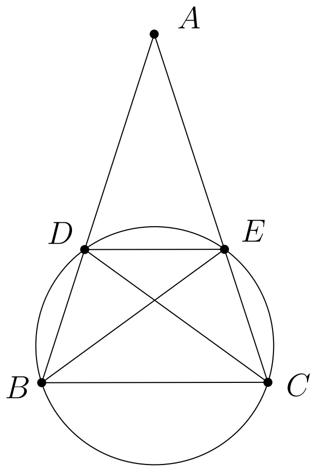
så att $y \leq x$ och $x \leq y$, och därmed $x = y$. På samma sätt får vi att $x = z$, vilket betyder att om x, y, z uppfyller ekvationerna, så måste $x = y = z$ gälla. Därmed räcker det att lösa ekvationen $\dfrac{x^2+4}{4} = x$, och vi får återigen att den enda lösningen är $x = y = z = 2$.

2. Tre klasser på en skola har samma antal elever. Totalt är det dubbelt så många flickor som pojkar i de tre klasserna, men i varje klass är båda könen representerade. I den första klassen finns 18 flickor, i den andra finns 8 pojkar, och i den tredje finns det fler pojkar än flickor. Hur många elever går i varje klass?

Lösning. Om vi antar att det är s elever i varje klass, har vi fått givet att antalet pojkar i klass A är lika med $s-18$, antalet flickor i klass B är $s-8$, och antalet pojkar i klass C är c, där $c > \frac{s}{2}$, det vill säga $s < 2c$. Eftersom det är dubbelt så många flickor som pojkar, måste en tredjedel av alla $3s$ eleverna vara pojkar, och därmed måste det totala antalet pojkar vara s. Vi har $s - 18 + 8 + c = s$, varav $c = 10$. Men med 18 flickor i A följer att $s \geq 19$, och med 10 pojkar i C blir $s < 20$, vilket gör att s måste vara exakt 19. Totala antalet elever är alltså 57. (I klass A 18 flickor och 1 pojke, i B 11 flickor och 8 pojkar och i C 9 resp 10.)

3. Triangeln ABC är likbent, med sidorna AB och AC lika långa. En cirkel som går genom hörnen B och C skär sidorna AB och AC i punkterna D och E, respektive. Givet att sträckorna BC och CD är lika långa, samt att sträckorna BD och DE är lika långa, bestäm vinklarna i triangeln ABC.

Lösning.



Låt vinkeln $\angle BCD$ vara θ. Vinklarna $\angle BCD$ och $\angle DCE$ utgör randvinklar på lika stora bågar, vilket medför att $\angle DCE = \theta$. Eftersom $AB = AC$ har vi att $\angle CBD = \angle BCE = \angle BCD + \angle DCE = 2\theta$. Av $BC = BD$ får vi att $\angle CBD = \angle BDC$, och vinkelsumman i $\triangle BCD$ blir $2\theta + 2\theta + \theta = 5\theta$. Det ger $\theta = 36°$. Triangelns vinklar är alltså $36°$, $72°$, $72°$.

4. Bestäm alla reella tal a, sådana att ekvationen

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} - \left(x + \frac{1}{x}\right) = a,$$

har minst en reell lösning.

Lösning 1. Vi noterar att vänsterledet är definierat för alla $x \neq 0$, då $x^2 + \dfrac{1}{x^2} > 0$, för alla reella $x \neq 0$. Vi har

$$x^2 + \frac{1}{x^2} < x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2,$$

och för $x > 0$ följer att

$$\sqrt{x^2 + \frac{1}{x^2}} < x + \frac{1}{x}.$$

Det betyder att ekvationen inte kan ha positiva lösningar för $a > 0$, och den kan inte heller ha negativa lösningar för $a < 0$. Ekvationen har ingen lösning för $a = 0$.

Låt $a \neq 0$. Sätt $t = x + \dfrac{1}{x}$. Ekvationen $x + \dfrac{1}{x} = t$ är lösbar för $t \geq 2$ (ger lösningar $x \geq 0$), samt för $t \leq -2$ (ger lösningar $x < 0$).

Den ursprungliga ekvationen kan skrivas om som ($t^2 \geq 4$)

$$\sqrt{t^2 - 2} = a + t.$$

Förutsatt att $a + t > 0$, får vi efter kvadrering den ekvivalenta ekvationen

$$t^2 - 2 = t^2 + 2at + a^2,$$

vilket ger $t = \dfrac{-2 - a^2}{2a}$. Detta t-värde togs fram under förutsättningen att $a + t > 0$, vilket betyder

$$a + \frac{-2 - a^2}{2a} = \frac{-2 - a^2 + 2a^2}{2a} = \frac{-2 + a^2}{2a} > 0,$$

som gäller då $a > \sqrt{2}$, eller då $-\sqrt{2} < a < 0$. Det slutliga villkoret för a får vi då av villkoret $t \leq -2$, eller $t + 2 \leq 0$, för $a > 0$, och $t \geq 2$, eller $t - 2 \geq 0$, för $a < 0$

$$\frac{-2 - a^2}{2a} + 2 = \frac{-2 + 4a - a^2}{2a} = -\frac{(a-2)^2 - 2}{2a} \leq 0, \quad a > 0,$$

och

$$\frac{-2 - a^2}{2a} - 2 = \frac{-2 - 4a - a^2}{2a} = -\frac{(a+2)^2 - 2}{2a} \geq 0, \quad a < 0.$$

Tillsammans med olikheterna för a som härleddes ovan ger det

$$a \geq \sqrt{2} + 2, \quad \text{eller} \quad \sqrt{2} - 2 \leq a < 0.$$

Lösning 2. Vi utgår här från ekvationen för t som härleddes ovan

$$\sqrt{t^2 - 2} - t = \frac{-2}{\sqrt{t^2 - 2} + t} = a,$$

där $|t| \geq 2$. Funktionen av t är avtagande för $t \leq -2$, och växande för $t \geq 2$. Ekvationen kommer att ha minst en reell lösning exakt när a befinner sig i funktionens värdemängd. När t varierar mellan $-\infty$ och -2 får vi att funktionen $\varphi(t) = \sqrt{t^2-2}-t$ antar alla värden mellan $+\infty$ och $\sqrt{2}+2$; när t varierar mellan 2 och $+\infty$ kommer funktionen $\varphi(t) = \dfrac{-2}{\sqrt{t^2-2}+t}$ att anta alla värden mellan $\sqrt{2}-2$ och 0 (utan 0), och vi får samma olikheter för a som tidigare.

5. En *produktmagisk* kvadrat är ett 3×3 rutnät där det i varje ruta står olika positiva heltal sådana att produkten av de tre talen i vardera rad, kolumn respektive diagonal är lika med samma tal N. Talet N kallas i så fall ett *produktmagiskt* tal.

(a) Ge exempel på en produktmagisk kvadrat.

(b) Hur många produktmagiska tal finns det som är mindre än eller lika med 2017? Motivera!

Lösning. (a) Antag att alla heltal i rutorna är potenser av 2. Vid multiplikation av två sådana tal läggs deras exponenter ihop, vilket betyder att exponenterna bildar en ”vanlig”, det vill säga additiv magisk kvadrat. En sådan är lätt att konstruera, uppgiften lämnas åt läsaren. För fler exempel, se (b).

(b) Givet en produktmagisk kvadrat, låt a beteckna det tal som står i mittenrutan. Produkten av talen i de två diagonalerna, den mittersta raden och den mittersta kolumnen blir:

$$N^4 = a^4 \cdot \text{produkten av de övriga talen i kvadraten}$$

Å andra sidan är produkten av talen i samtliga tre kolumner (eller rader)

$$N^3 = a \cdot \text{produkten av de övriga talen i kvadraten.}$$

Följaktligen (dividera de två ekvationerna med varandra) är $N = a^3$. Alla produktmagiska tal är således jämna kuber. Dessutom måste varje tal i kvadraten dela N, så N måste ha åtminstone 9 olika delare. Låt

$$a = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}.$$

vara primfaktoruppdelningen av a. Notera att antalet delare till $N = a^3$ är

$$d = (3k_1+1)(3k_2+1)\cdots(3k_n+1).$$

Eftersom $N = a^3 < 2017$ måste $a \leq 13$.

Om a är en primtalpotens, måste $k_1 \geq 3$, dvs $N = p^{3k}$ med $k \geq 3$. Möjliga värden som är mindre än 2017 blir då bara:

$$N = 2^9 = 512.$$

Om a har precis två primfaktorer får vi inga villkor på k_j och möjliga värden på N är

$$N \in \{6^3, 10^3, 12^3\} = \{216, 1000, 1728\}.$$

Vidare ser vi att a inte kan ha fler än två primfaktorer, eftersom $(2\cdot 3\cdot 5)^3 = 30^3 > 2017$. Det återstår att undersöka om 216, 512, 1000 och 1728 verkligen är produktmagiska.

Talet $512 = 8^3 = 2^9$ är en potens av 2, därmed kommer alla tal i kvadraten att vara (olika) potenser av två. Exponenterna kommer då att bilda en ”vanlig” magisk kvadrat, där summan av elementen i alla rader, kolumner och diagonaler är 9. Detta är dock omöjligt, eftersom summan av alla tal i kvadraten då skulle vara $3 \cdot 9 = 27$, som är mindre än $0 + 1 + 2 + \cdots + 8 = 36$.

Om $a = bc$, där b och c är större än 1 och relativt prima, så är

b^2c	c^2	b
1	bc	b^2c^2
bc^2	b^2	c

en produktmagisk kvadrat med $N = a^3$. Denna konstruktion täcker de tre fallen: $6 = 2 \cdot 3$, $10 = 2 \cdot 5$ och $12 = 4 \cdot 3$. Utskrivet:

$N = 216$:

12	9	2
1	6	36
18	4	3

$N = 1000$:

20	25	2
1	10	100
50	4	5

$N = 1728$:

48	9	4
1	12	144
36	16	3

6. Fem urklippta papperskvadrater (inte nödvändigtvis lika stora) läggs på ett rektangulärt bord så att var och en av deras sidor är parallell med någon av bordets kanter. Det visar sig att det finns (minst) en punkt på bordet som täcks av alla kvadrater. Visa att diagonalernas skärningspunkt i minst en av kvadraterna ligger ovanpå eller under en annan kvadrat.

Lösning 1. Drag två linjer, parallella med bordets kanter, genom en av punkterna som är gemensamma för alla fem kvadraterna. De två linjerna kommer att dela varje kvadrat i fyra rektangulära delar (två eller tre av dessa kan vara tomma). Titta på en av de fem kvadraterna, och de rektangulära delarna den är delad i. En av dessa rektanglar kommer att innehålla diagonalernas skärningspunkt. (Om skärningspunkten ligger på linjen mellan två rektanglar, välj en av dem.) Båda rektangelns sidor måste vara större än eller lika med halva den ursprungliga kvadratens sidlängd. Minska rektangeln till en kvadrat med sidor, parallella med bordets kanter, och sådan att den valda gemensamma punkten är ett av dess hörn, samt med sidlängd som fortfarande är minst halva den ursprungliga kvadratens sida. Denna kvadrat kommer då fortfarande att innehålla diagonalernas skärningspunkt i den ursprungliga kvadraten. Om vi genomför samma operation med alla fem kvadraterna, så kommer vi att få fem kvadrater med gemensamt hörn, och var och en av dem med två sidor på de två vinkelräta linjerna genom den gemensamma punkten. Två av dessa kvadrater kommer då att ligga ovanpå varandra, och den större av de två kommer därmed att innehålla diagonalernas skärningspunkt i den kvadrat, som gav ursprung till den mindre kvadraten.

Lösning 2. En kvadrat med sidorna parallella med $x-$ och $y-$axlarna, med diagonalernas skärningspunkt i (a, b), och med sidlängd c, innehåller punkten med koordinater (x, y) om och endast om $|a - x| \leq \frac{c}{2}$ och $|b - y| \leq \frac{c}{2}$. Vi kan utan inskränkning anta att den gemensamma punkten för de fem kvadraterna är $(0,0)$, och att kvadraternas sidor är parallella med $x-$ och $y-$axlarna. Låt (a_i, b_i) vara diagonalernas skärningspunkt i en kvadrat med sidlängd c_i. Vi har alltså $|a_i| \leq \frac{c_i}{2}$, $|b_i| \leq \frac{c_i}{2}$, för alla $i = 1,2,3,4,5$. Två av punkterna (a_i, b_i) måste ha samma tecken för vardera av koordinaterna. Vi kan utan inskränkning anta att $i = 1,2$, och att $c_1 \leq c_2$. Då är $|a_2 - a_1| \leq \max\{|a_1|, |a_2|\} \leq \frac{c_2}{2}$, och på samma sätt $|b_2 - b_1| \leq \frac{c_2}{2}$, vilket betyder att (a_1, b_1) ligger inne i kvadrat två.