SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 29 september 2020 - lösningar

1. Stadens sporthall har renoverats och de tretton ytterdörrarna är nu omväxlande målade vita, röda och blå. Dörrarna är antingen vita på båda sidorna eller tvåfärgade: röda på den ena sidan och vita eller blå på den andra. Exempelvis kan en rödvit dörr vara rödmålad på utsidan och vitmålad på insidan eller omvänt.

Mila funderar över den märkliga färgsättningen och noterar följande:

(1) Det finns dubbelt så många rödblå dörrar som helvita dörrar.

(2) Hos de 13 dörrarna är 10 av de 26 sidorna vita.

Hur många dörrar finns det av varje färgkombination?

Lösning. Låt x vara antalet helvita dörrar, y vara antalet rödvita dörrar och z antalet rödblå dörrar. Översatta till ekvationer betyder Milas iakttagelser att

$$z = 2x, \qquad 2x + y = 10.$$

Dessutom vet vi att det totala antalet dörrar är 13, så att $x + y + z = 13$. Elimination av z ger två ekvationer för x och y

$$3x + y = 13, \qquad 2x + y = 10.$$

Vi får att $x = 3$, $y = 4$ och $z = 6$. Det finns alltså tre helvita, fyra rödvita och sex rödblå dörrar.

2. En liten robot hoppar omkring bland punktformiga öar på en plan oändlig ocean. Öarna är fördelade så att det ligger en ö på varje punkt där båda koordinaterna är heltal. Roboten ställer en gång för alla in en fixerad hopplängd som är ett positivt heltal, och kan därefter börja hoppa runt bland öarna.

Den minimala hopplängden är 2. Finn den minsta hopplängden roboten kan välja om den vill kunna besöka vilken ö som helst. (Om roboten landar i vattnet blir den förstörd och förlorar allt hopp.)

Lösning. Låt s vara den hopplängd roboten ställer in. Att den hoppar från punkten (k, l) till punkten (m, n) med hopplängd s betyder att

$$\sqrt{(m-k)^2 + (n-l)^2} = s,$$

så att

$$(m-k)^2 + (n-l)^2 = s^2.$$

Vi undersöker heltalslösningarna till ekvationerna $x^2 + y^2 = s^2$. Eftersom $|x| \leq s$ och $|y| \leq s$ räcker det att sätta in $x = 0, \pm 1, \ldots, \pm s$ för att hitta alla lösningar. För

$s = 2,\ 3,\ 4$ är den enda möjligheten att en av de obekanta är 0 och den andra $\pm s$. Därmed kan roboten, om den väljer $s = 2,\ 3$ eller 4, endast röra sig i x-led eller i y-led, så att koordinaternas rester modulo 2, 3 eller 4 kommer hela tiden vara samma som resterna för utgångpunktens koordinater och roboten kommer inte att kunna besöka alla öar. Den första hopplängden som tillåter att roboten rör sig snett är $s = 5$, eftersom $3^2 + 4^2 = 5^2$. Vi ska visa att roboten vid hopplängd 5 kan röra sig ett steg åt höger; symmetri ger sedan att den kan röra sig ett steg åt vänster, upp eller ner. Vi kan utan inskränkning anta att utgångspunkten är ön i origo. En möjlig väg som leder från ön i origo till ön i punkten $(1, 0)$ är

$$(0,0) \to (-5,0) \to (-2,4) \to (1,0)$$

Den minsta hopplängden bland heltal större än eller lika med 2 som roboten kan välja om den vill kunna besöka vilken ö som helst är alltså $s = 5$.

3. De positiva reella talen a och b uppfyller att

$$a\sqrt{a} - (b^2+1)\sqrt{a} = b.$$

Visa att $\sqrt{a} + \dfrac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{4+b^2}$.

Lösning 1. Vi skriver om likheten som

$$b^2 + \frac{1}{\sqrt{a}}\,b - (a-1) = 0.$$

Det betyder att b är en positiv reell lösning till andragradsekvationen

$$x^2 + \frac{1}{\sqrt{a}}\,x - (a-1) = 0,$$

och därmed att

$$b = \frac{-\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{1}{a} + 4(a-1)}}{2} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{a}} + \sqrt{\frac{4a^2-4a+1}{a}}}{2} = \frac{|2a-1|-1}{2\sqrt{a}}\,.$$

Ur omskrivningen ovan ser vi att

$$a - 1 = b^2 + \frac{1}{\sqrt{a}}\,b > 0.$$

Därmed måste $|2a-1| = 2a-1$ gälla och det följer att

$$b = \frac{2a-2}{2\sqrt{a}} = \sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\,,$$

så att

$$4 = \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 - \left(\sqrt{a} - \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 = \left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2 - b^2$$

varur den önskade likheten följer.

Lösning 2. En omskrivning av den givna likheten ger

$$(a-b^2)\sqrt{a} = \sqrt{a}+b \qquad \Leftrightarrow \qquad (\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b)\sqrt{a} = \sqrt{a}+b$$

Eftersom $\sqrt{a}+b>0$ följer att

$$\sqrt{a}(\sqrt{a}-b) = 1 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}} = b$$

och vi avslutar som i lösning 1.

4. Låt ABC vara en triangel med $|AB| > |AC|$. Punkten D ligger på sidan AB och är sådan att $|DB| = |AC|$. Punkten E ligger på triangelns omskrivna cirkel på samma sida om BC som A och är sådan att $|EB| = |EC|$. Visa att DE och AC är parallella om och endast om vinkeln $\angle BAC$ är lika med $60°$.

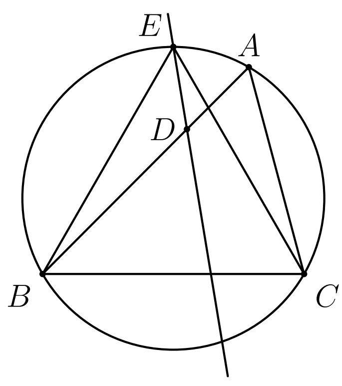
Lösning 1. Enligt randvinkelsatsen är $\angle DBE = \angle ABE = \angle ACE$. Därför är trianglarna DBE och ACE kongruenta (SVS). Det följer att $|ED| = |EA|$, triangeln AED är alltså likbent. Vi drar slutsatsen att $\angle EDA = \angle EAD = \angle EAB = \angle ECB = 90° - \frac{1}{2}\angle BEC$ (då triangeln BCE också är likbent). Nu får vi

$$\angle EDA = 90° - \frac{1}{2}\angle BEC = 90° - \frac{1}{2}\angle BAC.$$

Linjerna DE och AC är parallella om och endast om $\angle EDA = \angle BAC$, d.v.s. om

$$90° - \frac{1}{2}\angle BAC = \angle BAC.$$

Detta är ekvivalent med $\angle BAC = 60°$.

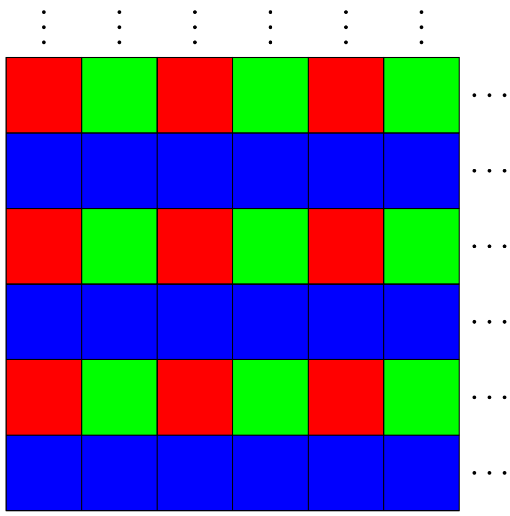


Lösning 2 (alternativt avslut). Vi inleder som i lösning 1 med att konstatera att $\angle DBE = \angle ABE = \angle ACE$, att trianglarna DBE och ACE är kongruenta samt att $|ED| = |EA|$ och triangeln AED alltså är likbent, så att $\angle EDA = \angle EAD$. Att $DE \| AC$ är ekvivalent med att $\angle EDA = \angle BAC$, och alltså med att $\angle BAE = \angle BAC$, vilket i sin tur är ekvivalent med att kordorna BE och BC är lika långa, eftersom punkten A ligger i det inre av vinkeln CBE. De två kordorna är lika långa om och endast om den likbenta triangeln BCE i själva verket är liksidig, vilket är ekvivalent med att dess toppvinkel $\angle BEC = 60°$. Det återstår nu bara att notera att $\angle BEC = \angle BAC$, enligt randvinkelsatsen, och vi är klara.

5. Varje ruta i ett 100×100 rutnät kan målas i röd, grön eller blå färg. En L-formad figur bestående av tre rutor kallas *vacker* om alla tre färgerna förekommer. Bestäm det största möjliga antalet vackra L-formade figurer man kan uppnå i rutnätet. (En ruta kan ingå i flera L-figurer. L-figuren kan roteras)

Lösning. Varje 2×2 kvadrat innehåller fyra L-formade delar. Om alla tre färgerna förekommer inom en sådan kvadrat (en av dem dubbelt), så är två av dessa fyra L-formade figurer vackra; annars ingen av dem. Det finns $99^2 = 9801$ olika 2×2 kvadrater i rutnätet och därmed högst $2 \cdot 99^2 = 19602$ vackra L-formade figurer.

Det finns många möjligheter att måla rutorna på ett sätt för vilket alla 2×2 kvadrater innehåller två vackra L-formade figurer, till exempel som i figuren nedan.



Det största möjliga antalet vackra L-formade delar är alltså 19602.

6. Låt a_0 vara ett positivt heltal med enbart jämna siffror, det vill säga 0, 2, 4, 6, 8. Definiera a_n för varje positivt heltal n genom att multiplicera a_{n-1} med 3 och sedan ta bort alla udda siffror från resultatet (ordningsföljden på de resterande siffrorna ändras inte). Visa att det finns två olika positiva heltal m och n sådana att $a_n = a_m$.

Lösning 1. Att beräkna a_n givet a_{n-1} kommer vi att kalla ett *steg*. Notera att en siffra tas bort enbart om det läggs en minnessiffra 1 till den i samband med multiplikationen, och att eventuella nollor sist i talet bevaras i varje steg. Sådana nollor påverkar inte multiplikationen eller borttagningen. Vi antar därför fortsättningsvis att den sista siffran i a_0 inte är 0. Låt b_n beteckna antalet siffror i a_n. Låt $k = \max(b_0, 2)$. Vi ska visa att $b_n \leq k + 1$ för alla n. Eftersom det bara finns ändligt många tal med så få siffror måste a_n alltså upprepa sig.

Lemma: Exakt i vartannat steg tas den nästsista siffran bort efter multiplikationen.

Bevis: Eftersom sista siffran inte är 0 ändras denna i cykeln: $2 \to 6 \to 8 \to 4 \to 2$ och minnessiffran ändras i ordningsföljden $0, 1, 2, 1, 0$, så exakt i vartannat steg är minnessiffran 1.

Det är klart att b_n maximalt kan öka med 1, och detta kan enbart hända när minnessiffran till ”den nya siffran” är 2 och nästsista siffran inte tas bort i det steget. Vi tittar alltså på en situation där $b_n = k$ och $b_{n+1} = k+1$ (om b_n ska komma över $k+1$ måste detta hända, eftersom b_0 startar på högst k). I detta fall uppfyller steget från a_n till a_{n+1} att:

- Första siffran är 8 eller 6 (inga andra kan producera minnessiffra 2).
- Nästsista siffran tas inte bort (lemmat ovan).

I alla fall blir första siffran i steget efter 2. Detta kan *inte* ge en ny siffra direkt och enligt lemmat ovan tas nästsista siffran bort i nästa steg, vilket betyder att $b_{n+2} \leq k$.

Lösning 2. Som i första lösningen, antag att sista siffran inte är 0. Om sista siffran är 6 eller 4 så tas tiotalssiffran bort i nästa steg. Detta ger:

$$a_{n+1} \leq \frac{3a_n - 10x - y}{10} + y = 0,3a_n - x + 0,9y,$$

där x och y är tiotals- och entalssiffrorna i $3a_n$. Notera att x är udda (≥ 1) och y är jämnt (≤ 8). Detta ger

$$a_{n+1} \leq 0,3a_n + 6,2; \qquad a_{n+2} \leq 0,9a_n + 18,6.$$

Om tiotalssiffran inte försvinner från a_n till a_{n+1} så försvinner den i steget därefter (Lemmat i första lösningen) vilket ger:

$$a_{n+2} \leq 0,9a_n + 6,2.$$

Alltså gäller alltid

$$a_{n+2} \leq 0,9a_n + 18,6$$

(om entalssiffran inte är 0). Alltså är $a_{n+2} < a_n$ om $a_n \geq 200 > 186$. Detta innebär att a_n så småningom kommer bli tvåsiffrigt.

Lösning 3. Låt b_n beteckna antalet siffror i a_n. Vi ska visa att antingen är $b_{n+1} \leq b_n$ eller så är $b_{n+2} \leq b_n$. Då är följden begränsad och kommer att upprepa sig.

Fall 1: Alla siffror i a_n är antingen 0 eller 2. Då är $b_{n+1} = b_n$.

Fall 2: Det finns en siffra > 2. Låt $c \in \{4, 6, 8\}$ vara den sista siffran som bara följs av 0:or och 2:or. Det betyder att siffrorna efter c inte ger upphov till minnessiffror.

Fall 2a: $c = 4$ eller 6. Då har $3a_n$ en udda siffra i positionen framför den för c och $b_{n+1} \leq b_n$.

Fall 2b: $c = 8$. Då är $b_{n+1} \leq b_n + 1$ och a_{n+1} innehåller en 4:a i positionen för c. Det betyder att $3a_{n+1} \leq 9a_n < 10a_n$ har högst $b_n + 1$ siffror men en udda siffra i positionen före c från tiotalssiffran i $3 \cdot 4$. Alltså är $b_{n+2} \leq b_n$.