SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 28 september 2021 - lösningar

1. En dubbelspårig järnvägslinje trafikeras av två tåg, A och B, som framförs på var sitt spår i bägge riktningar. Tåget A är 380 meter långt och är snabbare än tåget B som har längden 420 meter. Vart och ett av tågen kör med konstant hastighet.

När tågen går i samma riktning kan det hända att A ligger efter B men kommer ifatt B och kör om. Hela omkörningen tar då exakt 2,5 minuter. När tågen går i olika riktning passerar de varandra helt och hållet på exakt 40 sekunder.

En järnvägsfantast står och tittar på tågen. Hur lång tid tar det för tåget A att passera honom?

Lösning. Beteckna tågens hastigheter i meter per sekund med v_A respektive v_B. Vi vet att $v_A > v_B$. Om tåget A passerar tåget B när det senare står stilla måste A avverka sträckan $380 + 420 = 800\,\mathrm{m}$ innan A-tåget helt och hållet har passerat B-tåget.

När de båda tågen kör i samma riktning med nämnda hastigheter och A passerar B, kan detta uppfattas som att A:s hastighet relativt B är $v_A - v_B$ medan sträckan fortfarande är $800\,\mathrm{m}$.

När de båda tågen möts blir A:s hastighet relativt B nu $v_A + v_B$ med sträckan $800\,\mathrm{m}$.

Vi får ekvationssystemet:

$$(v_A - v_B) \cdot 150 = 800,$$

$$(v_A + v_B) \cdot 40 = 800,$$

vilket kan skrivas

$$v_A - v_B = \frac{16}{3},$$

$$v_A + v_B = 20.$$

Vi adderar ekvationerna, dividerar med 2 och får $v_A = \dfrac{38}{3}\,\mathrm{m/s}$. Om A-tåget passerar järnvägsfantasten på tiden t är sträckan $380\,\mathrm{m}$ vilket ger ekvationen $\dfrac{38}{3} \cdot t = 380$, med lösningen $t = 30\,\mathrm{s}$, det vill säga det tar en halv minut för tåget att passera järnvägsfantasten.

2. För ett positivt heltal kan vi bilda mängden av alla *deltal* som kan fås genom att välja ut några av siffrorna, i samma ordning som i det ursprungliga talet, och läsa dem som ett tal. Exempelvis får vi de fem deltalen $3, 7, 33, 37$ och 337 från talet 337. Bestäm alla positiva heltal vars samtliga deltal är primtal.

Lösning. Det är endast $2, 3, 5, 7, 23, 37, 53$ och 73.

Alla ensiffriga primtal fungerar, det vill säga $2, 3, 5$ och 7, men inga andra ensiffriga tal. Ett flersiffrigt tal måste vara uppbyggt av siffrorna $2, 3, 5$ och 7. Siffran 2 och siffran 5 kan endast stå som första siffra, eftersom talet annars har ett deltal delbart med 2 eller 5. Talet kan inte innehålla två lika siffror, eftersom det då skulle ha ett deltal delbart med 11. För tvåssiffriga tal lämnar detta möjligheterna $23, 37, 53$ och 73, som uppfyller kraven.

Om vi skulle ha ett tresiffrigt tal kan det inte innehålla siffrorna $3, 5$ och 7 samtidigt, eftersom det då skulle ha ett deltal delbart med 3. Det måste alltså ha första siffra 2. Det kan i så fall inte innehålla siffran 5, utan måste vara uppbyggt av siffrorna $2, 3$ och 7. Men $2 + 3 + 7 = 12$, så ett sådant tal skulle vara delbart med 3. Det finns alltså inga tresiffriga tal som uppfyller villkoren. Därmed kan det inte heller finnas något sådant tal med fler än tre siffror. Vi drar slutsatsen att de åtta talen $2, 3, 5, 7, 23, 37, 53$ och 73 är de enda heltalen som uppfyller villkoren.

3. Finn alla reella lösningar till ekvationen

$$x^{2021} + 2021x^{2020} + 2021x^{2019} + \cdots + 2021x + 2020 = 0.$$

Lösning. Summan av alla termer utom den första och den sista är en geometrisk summa. För $x \neq 1$ kan den skrivas som

$$2021x^{2020} + 2021x^{2019} + \cdots + 2021x = 2021x \cdot \frac{x^{2020} - 1}{x - 1}$$

Insättning i den givna ekvationen visar att 1 inte är en lösning. Ekvationen är alltså ekvivalent med

$$\begin{aligned} & x^{2021} + 2021x \cdot \frac{x^{2020} - 1}{x - 1} + 2020 = \\ =& \frac{x^{2022} - x^{2021} + 2021x^{2021} - 2021x + 2020x - 2020}{x - 1} = \\ =& \frac{x^{2022} + 2020x^{2021} - x - 2020}{x - 1} = \frac{(x^{2021} - 1)(x + 2020)}{x - 1} = 0. \end{aligned}$$

Talet 2021 är udda, vilket ger att $x^{2021} \neq 1$ för reella $x \neq 1$. Det betyder att ekvationens enda reella lösning är $x = -2020$.

4. Låt n vara ett positivt heltal. En stapel med $3n$ likadana mynt ligger på ett bord, vart och ett med antingen sidan 'klave' uppåt eller sidan 'krona' uppåt. Stapeln kan ordnas om (ett 'drag') genom att ta den delstapel som de m översta mynten utgör (där $1 \leq m \leq 3n$) och vända hela denna delstapel upp och ned. Visa att man oavsett utgångsläge, med detta sätt att ordna om stapeln, kan uppnå varje tänkbar följd av 'krona' och 'klave' i stapeln med högst $4n - 1$ drag.

Lösning. Högen kan delas upp i n grupper om 3 mynt vardera. Vi kan ordna mynten i den önskade ordningen genom att först se till att de tre mynten längst ner blir rätt vända, sedan att de tre mynten i den näst sista 3-gruppen blir rätt vända, och så vidare, tills vi endast har de tre översta mynten kvar att ordna och vänder dem rätt.

Vi börjar med att visa att man kan ordna de tre översta mynten rätt med högst 3 drag. Beteckna den ena sidan med 1 och den motsatta med 0. Det finns åtta möjliga tillstånd mellan $(0,0,0)$ och $(1,1,1)$ ("upp" ligger till höger). Låt 1 beteckna orienteringen vi vill ha för det tredje myntet. Antag till att börja med att vi börjar med ett tillstånd då det tredje myntet har den önskade orienteringen. Då är det bara två mynt som ska ordnas om och för dem finns det fyra möjliga tillstånd. Det låter sig göras på högst tre drag, vilket visas nedan ($\leftrightarrow$ står för att man vänder en delstapel som ligger överst):

$$(1,1,0) \leftrightarrow (1,1,1) \leftrightarrow (1,0,0) \leftrightarrow (1,0,1)$$

Antag nu att det tredje myntet har den motsatta till den önskade orienteringen, det vill säga att vi börjar med något av tillstånden $(0,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,1,1)$. Det går att komma från vilket som helst av dem till vilket annat som helst på högst tre drag, vilket visas nedan:

$$(0,0,0) \leftrightarrow (1,1,1) \leftrightarrow \begin{cases} \quad (1,1,0) \\ (1,0,0) \leftrightarrow (1,0,1) \end{cases}$$

$$(0,1,0) \leftrightarrow (1,0,1) \leftrightarrow (1,0,0) \leftrightarrow \begin{cases} (1,1,1) \\ (1,1,0) \end{cases}$$

$$(0,0,1) \leftrightarrow \begin{cases} (0,0,0) \leftrightarrow (1,1,1) \leftrightarrow \begin{cases} (1,1,0) \\ (1,0,0) \end{cases} \\ (0,1,1) \leftrightarrow (0,1,0) \leftrightarrow (1,0,1) \end{cases}$$

$$(0,1,1) \leftrightarrow \begin{cases} (0,1,0) \leftrightarrow (1,0,1) \\ (0,0,0) \leftrightarrow (1,1,1) \leftrightarrow \begin{cases} (1,1,0) \\ (1,0,0) \end{cases} \end{cases}$$

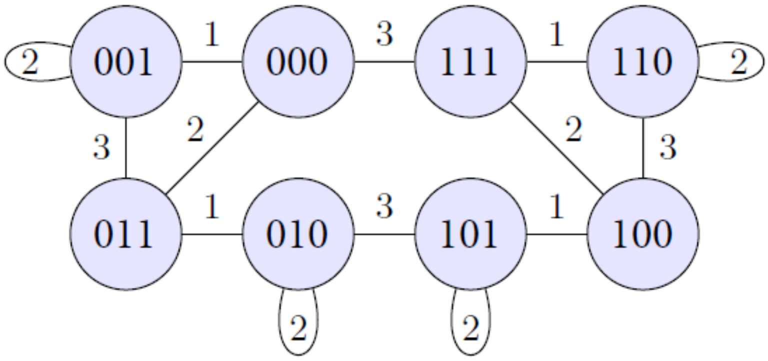
Låt oss nu se hur många drag det behövs för att få den önskade ordningen i en 3-grupp som ligger på plats k uppifrån, det vill säga som innehåller mynten $3k-2,\ 3k-1,\ 3k$, räknat uppifrån, där $k > 1$. Om a är en viss orientering hos ett mynt, beteckna med $-a$ den motsatta orienteringen. Säg att vi vill ha ordningen (a,b,c) i den valda 3-gruppen. Vi kan då vända de tre översta mynten till $(-c,-b,-a)$ (om de inte redan ligger så) med maximalt 3 drag, och sedan vända delstapeln som består av de $3k$ översta mynten, alltså totalt maximalt 4 drag för detta. Allra sist ser vi till att få rätt ordning i de tre översta mynten, vilket vi har visat kan göras med högst 3 drag.

Eftersom vi har $n-1$ grupper om tre mynt som inte ligger överst kommer vi totalt att behöva högst $4(n-1)+3 = 4n-1$ drag för att få den önskade ordningen i hela högen.

Anmärkning 1. Man kan bevisa att det i själva verket räcker med n drag för en hög av n mynt för alla $n \geq 3$. För $n = 2$ kan man däremot behöva tre drag.

Anmärkning 2. Med tre mynt får man grafen nedan där till exempel 001 betyder att översta myntet är 1 (krona) och de andra två mynten är 0 (klave).

Man ser lätt att grafens diameter är 3, dvs det går att komma från varje tillstånd till varje annat tillstånd med högst tre steg. Observera att det inte alltid går att ordna de två understa mynten på två steg: börjar vi på 001 tar det tre drag att ordna så att de två understa är 10.



5. En följd $a_1, a_2, \ldots$ av positiva heltal uppfyller rekursionen $a_{n+1} = a_n + \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor + \lceil \sqrt{a_n} \rceil$ för alla $n \geq 1$. Visa att det finns ett polynom $P(x)$ så att $a_n = P(n)$ för alla $n > 1$.

Lösning. Låt oss först visa att inget tal i följden, utom möjligen det första, kan vara en jämn kvadrat (nedan skriver vi bara kvadrat istället för jämn kvadrat). Antag först att $a_1 = l^2$ för något positivt heltal l. Då gäller $\lfloor \sqrt{a_1} \rfloor = \lceil \sqrt{a_1} \rceil = \sqrt{a_1} = l$, så att $a_2 = l^2 + 2l$. Eftersom $l^2 < l^2 + 2l < l^2 + 2l + 1 = (l+1)^2$, får vi att a_2 ligger strikt mellan två på varandra följande kvadrater och att det därför inte kan vara en kvadrat. Antag sedan att $a_m = k^2 + r$, där k är ett positivt heltal och $0 < r < 2k + 1$. För nästa tal i följden gäller då att

$$a_{m+1} = a_m + \lfloor \sqrt{a_m} \rfloor + \lceil \sqrt{a_m} \rceil = k^2 + r + k + k + 1 = (k+1)^2 + r.$$

Eftersom $0 < r < 2k+1 < 2(k+1)$ är a_{m+1} inte en kvadrat. Därmed kan inget av talen utom det första vara en kvadrat.

Låt $a_2 = k^2 + r$, där k är ett positivt heltal och $0 < r < 2k + 1$. Betrakta polynomet

$$P(x) = (x + k - 2)^2 + r.$$

Vi ska visa att $a_n = P(n)$ för alla $n \geq 2$. För $n = 2$ får vi $P(2) = k^2 + r = a_2$. Det räcker nu att visa att

$$P(n+1) = P(n) + \left\lfloor \sqrt{P(n)} \right\rfloor + \left\lceil \sqrt{P(n)} \right\rceil.$$

Vi har

$$\begin{aligned} P(n+1) &= (n+1+k-2)^2 + r = (n+k-2)^2 + 2(n+k-2) + 1 + r = \\ &= ((n+k-2)^2 + r) + (n+k-2) + ((n+k-2) + 1). \end{aligned}$$

Eftersom $0 < r < 2k + 1 \leq 2(n + k - 2) + 1$ får vi

$$\left\lfloor \sqrt{P(n)} \right\rfloor = n + k - 2, \qquad \left\lceil \sqrt{P(n)} \right\rceil = (n+k-2) + 1,$$

så att

$$P(n+1) = P(n) + \left\lfloor \sqrt{P(n)} \right\rfloor + \left\lceil \sqrt{P(n)} \right\rceil.$$

6. Låt ABC vara en triangel. Låt P vara en punkt på sidan AB och Q vara en punkt på sidan AC sådana att $|PC| + |CQ| = |PB| + |BQ|$. Visa att det finns en punkt som ligger på samma avstånd från linjerna AB, AC, PC och QB.

Lösning. Enligt villkoret har trianglarna APC och ABQ samma omkrets som vi betecknar med $2p$. Låt X och Y vara punkterna på avstånd p från A på strålarna AB respektive AC. Låt O vara skärningspunkten mellan linjen genom X som är vinkelrät mot AB och linjen genom Y som är vinkelrät mot AC. Vi ska visa att O är den sökta punkten.

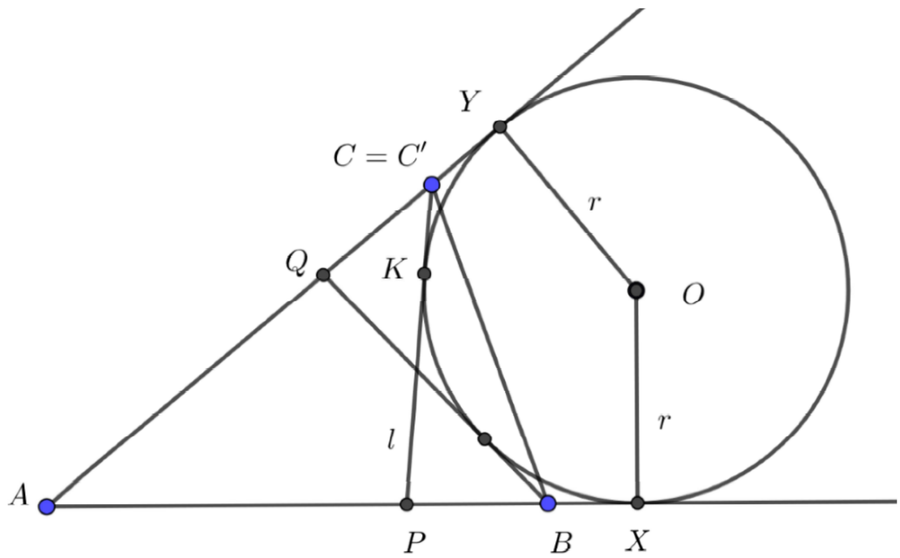
Trianglarna AXO och AYO är kongruenta, eftersom båda är rätvinkliga, har samma hypotenusa och varsin katet med längd p. Det medför att $OX = OY$, så att punkten O är på lika avstånd från linjerna AB och AC. Beteckna detta avstånd med r. Cirkeln med medelpunkt O och radie r tangerar linjerna AB och AC. Vi behöver visa att den även tangerar linjerna PC och BQ. Låt oss visa att den tangerar linjen PC. Beviset att den tangerar BQ går till på samma sätt. Vi ska visa att C ligger på linjen l genom P som tangerar cirkeln och som är skild från linjen AB. Beteckna med C' skärningspunkten mellan l och linjen AC. Vi vill visa att $C' = C$. Beteckna tangeringspunkten mellan PC' och cirkeln med K. Då gäller $PK = PX$ och $C'K = C'Y$, eftersom de två tangenterna till en cirkel från en punkt är lika långa. Det följer att triangeln APC' har omkrets lika med

$$AP + PK + KC' + AC' = AP + PX + AC' + C'Y = AX + AY = 2p,$$

som är samma som omkretsen för APC. Trianglarna APC och APC' har alltså samma omkrets. Antag att $C' \neq C$ och att C ligger mellan[1] A och C'. Ur omkretsarnas likhet följer att

$$AP + PC + AC = AP + PC' + AC + CC',$$

så att $PC = PC' + CC'$, vilket enligt triangelolikheten är omöjligt då P inte ligger på linjen AC. Ur motsägelsen följer att $C = C'$ och därmed att linjen PC tangerar cirkeln.



[1]Fallet när C' ligger mellan A och C hanteras på samma sätt.