SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 27 september 2022 - lösningar

1. Filip ställer tio frågor till Cecilia om hennes lyckotal:

- Är det delbart med 1?
- Är det delbart med 2?
- $\cdots$
- Är det delbart med 10?

Svaret blir "ja" på alla frågor utom en, då Cecilia svarar "nej, de har inte ens någon gemensam faktor utom 1". Vilken av frågorna besvarade Cecilia på detta sätt?

Lösning. Cecilia svarar "ja" antingen på fragan "är det delbart med 2" eller på fragan "är det delbart med 4?", eftersom hon bara svarar "nej" en gång. Därför måste lyckotalet vara jämnt. På samma sätt kan vi visa att lyckotalet är delbart med 3 (fråga 3 eller fråga 6) och delbart med 5 (fråga 5 eller fråga 10). Därför har Cecilias lyckotal en gemensam delare (större än 1) med $2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$ och 10. Lyckotalet är såklart delbart med 1, så det finns bara en möjlighet: Cecilias lyckotal är inte delbart med 7.

2. Alice studerar tre fotografier där hon och hennes syskon är avbildade. På det första kortet, taget på nyårsdagen 2010, finns alla syskonen med utom Alice själv som då ännu inte var född. På det andra kortet, från nyårsdagen 2015, ser man Alice tillsammans med alla hennes syskon. På det tredje, från nyårsdagen 2022, finns hela syskonskaran med undantag av Noah som hade flyttat hemifrån innan det kortet togs.

På baksidan av korten har Alice noterat summan av syskonens åldrar vid tillfället (i hela tal) för de syskon som finns med på fotot. På det första kortet är summan 36, på det andra 64 och på det tredje 82 år.

Hur många syskon är det totalt och hur gammal var Noah på nyårsdagen 2022?

Lösning. Låt k vara antalet barn utöver Alice och Noah. Låt vidare Alices ålder år 2015 vara x.

Ålderssumman för de $k + 1$ barnen, Noah inräknad, har från 2010 till 2015 ökat med $5(k + 1)$ år. Eftersom Alice har tillkommit får vi sambandet $36 + 5(k + 1) + x = 64$.

Eftersom Alice är yngre än 5 år har vi att $0 \leq x \leq 4$ och enda möjligheten är att $5(k + 1) = 25$ och $x = 3$, det vill säga $k = 4$ och $x = 3$. Sju år senare är den sammanlagda åldern för de sex barnen $64 + 7(k + 2) = 106$, men på kortet från 2022 där summan anges till 82, finns ju inte Noah med. Noah fyllde alltså $106 - 82 = 24$ detta år.

3. En kortlek består av 2022 kort, numrerade $1, 2, \ldots, 2022$. Vissa kort är röda, de övriga är blå. Låt M vara det största av talen på de blå korten och m det minsta av talen på de röda korten. Man vet att $M = 2b$, där b är antalet blå kort, och att $m = \frac{r}{4}$, där r är antalet röda kort. Dessutom vet man att hälften av talen på de röda korten är större än M, hälften är mindre än M.

Hur många av talen på de blå korten är större än m?

Lösning. Eftersom endast de röda korten kan ha tal som överstiger M, leder det sista villkoret till att $2022 - M = \frac{r}{2}$, det vill säga $r + 2M = r + 4b = 4044$. Vi har också $r + b = 2022$. Subtraktion ger $r = 1348$ och $b = 674$, varav $m = 337$ och $M = 1348$.

Då endast blå kort kan kan ha tal som är mindre än m, gäller att de 336 korten med tal som understiger m alla är blå. Antalet blå kort med tal som är större än m är följaktligen $674 - 336 = 338$.

4. Bestäm alla heltal k för vilka det finns tre positiva heltal a, b, c sådana att

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) = 9 + \frac{k}{abc}.$$

Lösning.

Vi multiplicerar med abc och förenklar:

$$\begin{aligned} k &= (a+b+c)(bc+ac+ab) - 9abc \\ &= a^2b + ab^2 + a^2c + ac^2 + b^2c + bc^2 - 6abc \\ &= a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2. \end{aligned}$$

Vi ser redan att k måste vara icke-negativt, eftersom $a(b-c)^2 \geq 0$, $b(c-a)^2 \geq 0$ och $c(a-b)^2 \geq 0$. Observera också att $a^2b + ab^2 = ab(a+b)$ är jämnt: om a och b är udda, måste $a+b$ vara jämnt. Därför är minst en av faktorerna $a, b, a+b$ jämn. På samma sätt ser vi att $a^2c + ac^2$ och $b^2c + bc^2$ är jämna tal, och det visar sig att k måste vara jämnt. För varje jämnt tal $k = 2\ell$ med $\ell > 0$ finns det faktiskt minst en lösning: om $a = b = \ell$ och $c = \ell + 1$, då är

$$(a+b+c)(bc+ac+ab) - 9abc = (3\ell+1)(3\ell^2+2\ell) - 9\ell^2(\ell+1) = 2\ell.$$

Om $k = 0$ kan vi (till exempel) välja $a = b = c = 1$.

De möjliga värdena på k är alltså alla icke-negativa jämna heltal.

5. Punkten M är mittpunkt på sidan BC i triangeln ABC. Punkten P på sidan AB är sådan att $|BP| = 2|AP|$ och $|PM| = |AP|$. Visa att $|BC| = 2|AC|$.

Lösning 1. Låt Q vara punkten på PB för vilken $|PQ| = |BQ|$. Då är MP median mot sidan AQ i $\triangle AQM$ och $|AQ| = 2|MP|$. Det följer att $\angle AMQ$ är rät. (Om man inte ser det direkt kan man resonera så: trianglarna QMP och AMP är likbenta, eftersom $|QP| = |PM| = |PA|$; om φ och θ betecknar deras respektive basvinklar får vi att $2\varphi + 2\theta = 180°$, så att $\angle AMQ = \varphi + \theta = 90°$.) Punkterna M och Q är mittpunkter på sidorna BC och BP i $\triangle PBC$, vilket betyder att $MQ \| CP$. Därmed gäller $CP \perp AM$.

Triangeln APM är likbent, vilket medför att CP delar AM mitt itu. Om vi då tittar på triangeln AMC betyder det att linjen CP innehåller såväl medianen som höjden till vinkeln ACM. Triangeln ACM är därmed likbent med $|AC| = |MC|$, och påståendet följer.

Lösning 2. Låt D vara punkten på linjen CA som uppfyller $|AC| = |AD|$ och $D \neq C$. Av det följer att sträckan BA är median i triangeln BCD. Medianen DM måste då skära BA i förhållande $2 : 1$, räknat från B, det vill säga DM går genom punkten P. Då gäller $|DP| = 2|PM| = 2|PA| = |BP|$. Vinklarna BPM och DPA är lika som vertikalvinklar. Vi får att trianglarna BPM och DPA är kongruenta enligt sida-vinkel-sida-fallet ($|BP| = |DP|$, $|PM| = |PA|$, $\angle BPM = \angle DPA$). Därav följer att $|DA| = |BM|$ och $|BC| = 2|BM| = 2|DA| = 2|AC|$.

6. En trappa har tio trappsteg. Xerxes klarar att ta högst två steg i taget, antingen uppåt eller nedåt. På hur många sätt kan han komma uppför trappan utan att besöka samma nivå två gånger?

Lösning. Låt A_n vara mängden av stegsekvenser som Xerxes kan gå för att komma uppför en n-stegstrappa utan att besöka någon nivå två gånger och låt a_n vara antalet sekvenser i A_n, vilket betecknas med $a_n = |A_n|$. Vi söker a_{10}. Det är lätt att reda ut att $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ och $a_3 = 4$. De möjliga stegsekvenserna kan delas in i tre disjunkta mängder B_n, C_n och D_n på följande sätt: Sekvenser i B_n inleds med att gå ett trappsteg upp. Sekvenser i C_n inleds med att gå två steg upp och besöker aldrig nivå ett. Slutligen består D_n av de sekvenser som inleds med två steg upp och därefter direkt ett steg ner.

Det är uppenbart att de tre mängderna är disjunkta (det vill säga ingen stegsekvens kan tillhöra två av mängderna). Vidare ger de tre tillsammans hela A_n, det vill säga deras union är A_n. För att se det räcker det att inse att om någon sekvens i A_n besöker nivå två och senare kommer till nivå ett, så måste nivå ett besökas direkt efter nivå två. Om den nämligen skulle besökas senare än så, måste Xerxes komma dit från nivå tre, och då kan han aldrig komma från nivå ett igen utan att återbesöka en nivå.

Nu noterar vi att $|B_n| = a_{n-1}$, $|C_n| = a_{n-2}$ och $|D_n| = a_{n-3}$ om $n \geq 4$. Således gäller för $n \geq 4$ att $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + a_{n-3}$. Denna rekursion låter oss lista talen a_n för $n \leq 10$ som följer: $1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, 149, 274$. Svar: 274.