SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 26 september 2023 - lösningar

1. Dag köper äpplen och päron på torget. Han fyller en påse med de båda sorterna och får veta att priset är 137 centavos. För dyrt, tycker Dag och tar bort tre äpplen och ett päron från påsen. Priset är nu nere i 114 centavos, men Dag är fortfarande inte helt nöjd. Han plockar därför bort frukter av den ena sorten (enbart) tills påsen innehåller lika många äpplen som päron. Nu är han nöjd och får sin påse för 104 centavos. Styckepriserna för frukterna är heltal och själva påsen är gratis.

Vilka var styckepriserna för de båda frukterna?

Lösning. Låt a och p ange styckepriser och låt m och n vara respektive antal äpplen och päron från början. Vi har då sambandet

$$am + pn = 137.$$

Efter att Dag har plockat bort tre äpplen och ett päron har vi

$$a(m-3) + p(n-1) = 114,$$

vilket ger $3a + p = 23$. När Dag för andra gången tagit bort ett antal frukter har vi sambandet

$$ak + pk = 104 = 2^3 \cdot 13,$$

där k är det minsta av talen $m-3$ och $n-1$. Eftersom $3a+p = (a+p)+2a = 23$ får vi att $a+p$ måste vara ett udda tal, som vi dessutom vet är större än eller lika med 2. Den enda möjligheten är då $a+p = 13$ och $k = 8$, vilket ger styckepriserna $a = 5$ och $p = 8$.

(Att de två styckepriserna verkligen fungerar ser vi om vi väljer frukternas ursprungliga antal till $m = 13$ och $n = 9$.)

2. Fyra vänner skriver var sitt ensiffrigt tal (ett tal mellan 0 och 9) på en pappersbit. De väljer inte nödvändigtvis olika tal. Det visar sig att produkten av de fyra talen är ett kubiskt tal. Bestäm alla möjliga värden för denna produkt.

Lösning. Produkten är högst lika med $9^4 = 6561 < 8000 = 20^3$. Därför måste den vara lika med en av kuberna $0^3, 1^3, 2^3, \ldots, 19^3$. Dessutom kan produkten inte vara lika med 11^3, 13^3, 17^3 eller 19^3, eftersom den inte innehåller någon primfaktor som är större än 9. Om produkten är lika med 15^3, måste primfaktorn 5 förekommer tre gånger, vilket endast är möjligt om tre av vännerna väljer 5. Den fjärde vännen måste då väjla $\frac{15^3}{5^3} = 27$, vilket inte är tillåtet. Därför kan produkten inte heller vara lika med 15^3. Alla andra kuber som är mindre än 20^3 är möjliga:

$$0^3 = 0\cdot 0\cdot 0\cdot 1, \quad 1^3 = 1\cdot 1\cdot 1\cdot 1, \quad 2^3 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 1, \ \ldots, \quad 9^3 = 9\cdot 9\cdot 9\cdot 1,$$
$$10^3 = 5\cdot 5\cdot 5\cdot 8, \quad 12^3 = 6\cdot 6\cdot 6\cdot 8, \ \ldots, \quad 18^3 = 9\cdot 9\cdot 9\cdot 8.$$

3. Anna och Peter spelar följande spel. Innan de börjar skrivs några heltal på tavlan. I ett drag kan man byta två jämna tal mot deras summa eller två udda tal mot deras produkt. Den förste som inte kan göra ett drag förlorar. Anna börjar. För vilka startuppsättningar av heltal har Anna en vinnande strategi?

Lösning. Låt x och y vara antalet jämna tal respektive antalet udda tal som står på tavlan. Vi noterar först att *jämnt tal + jämnt tal = jämnt tal* och att *udda tal · udda tal = udda tal*. Antag till att börja med att $x > 0$ och $y > 0$. I varje drag reduceras antingen x eller y, och därmed deras summa $x + y$, med 1, men inget av dem kan reduceras till 0 som resultat av något drag. Det går därför att göra ett drag om och endast om $x + y > 2$. Det följer att antalet drag i spelet är precis $x + y - 2$, och därför att Anna vinner (oberoende av hur de spelar) om och endast antalet möjliga drag är udda, det vill säga om $x + y$ var udda.

Låt nu $x = 0$ ($y = 0$ hanteras på samma sätt). I detta fall kan inget drag ändra x, detta ger därför samma utfall som $x = 1$ och samma ursprungliga y. Därför vinner Anna om och endast om $y+1$ är jämnt, alltså om y är udda (återigen oberoende av hur de spelar).

4. Låt $n \geq 5$ vara ett heltal och bilda en geometrisk figur som består av romber med sidan 1 längdenhet på följande sätt. Börja med n kongruenta romber som bildar en stjärna. Fortsätt genom att successivt lägga till lager av kongruenta romber som fyller upp rummet mellan intilligande romber i föregående lager. Varje romb som läggs till kommer att ha en gemensam sida med två av romberna i föregående lager. Processen slutar när det inte längre går att lägga till fler lager. Hur många romber (som funktion av n) innehåller figuren när processen slutar?

Lösning. Låt $\theta = \dfrac{360°}{n}$ vara den spetsiga vinkeln i det första lagret romber. Dessa bildar en stjärna som är en icke-konvex polygon (månghörning) med $2n$ hörn. Vid varje steg i processen bildas en ny $2n$-hörning och vi kan fortsätta tills vi har en konvex polygon, det vill säga en polygon i vilken alla inre vinklar är mindre än $180°$.

Vinkelsumman i en $2n$-hörning är $(2n-2)180°$. Det betyder att om de n inre vinklarna vid stjärnans uddar när vi börjar är θ kommer de n vinklarna mellan uddarna att vara $360° - \dfrac{(2n-2)180° - n\theta}{n} = 360° - 360° + \theta + \theta = 2\theta$. Nästa lager romber ska därför ha vinkel 2θ. På samma sätt får vi att nästa lager romber har vinklar 3θ. Generellt, om de konvexa vinklarna i uddarna i lager k är $k\theta$ kommer vinklarna mellan dem att vara $360° - \dfrac{(2n-2)180° - nk\theta}{n} = 360° - 360° + \theta + k\theta = (k+1)\theta$. Nästa lager romber ska därför ha vinkel $(k+1)\theta$. Vi kan fortsätta så länge $k\theta < 180°$, det vill säga så länge $k < \dfrac{n}{2}$. För udda n innebär det $k = 1, 2, \ldots, \dfrac{n-1}{2}$ och för jämna n innebär det $k = 1, 2, \ldots, \dfrac{n-2}{2}$. Antalet romber blir därmed $\dfrac{n(n-1)}{2}$ om n är udda och $\dfrac{n(n-2)}{2}$ om n är jämnt. Vi kan skriva detta som $n\left\lceil \dfrac{n-1}{2} \right\rceil$, där $\lceil x \rceil$ är det minsta heltal som är större än eller lika med x.

5. Vinkeln vid C i $\triangle ABC$ är 45° och vinkeln vid A är spetsig. Sträckorna BD och CE är höjder i triangeln ($E \neq B$). Punkten F på sidan AB är sådan att DF är vinkelrät mot AB. Visa att om $|CE| + |BE| = 2|DF|$ så är vinkeln vid hörnet A mindre än 45° och omvänt, om vinkeln vid hörnet A är mindre än 45° så gäller $|CE| + |BE| = 2|DF|$.

Lösning. Eftersom $E \neq B$ har vi att $\angle ABC \neq 90°$. Att vinkeln vid A är spetsig betyder att A inte ligger mellan B och E. Villkoret $\angle BAC < 45°$ är ekvivalent med $\angle ABC > 90°$, vilket i sin tur är ekvivalent med att punkten B ligger mellan A och E.

Lösning 1. Låt vinkeln vid hörnet A vara mindre än 45°. Beteckna med G punkten D:s ortogonala projektion på höjden CE (det vill säga $DG \perp CE$, G ligger på CE). Fyrhörningen $BECD$ är inskriven i cirkeln med diameter BC, eftersom $\angle BEC = \angle BDC = 90°$. Av randvinkelsatsen följer då att $\angle BED = \angle BCD = 45°$. Trianglarna $\triangle EFD$ och $\triangle EGD$ är alltså båda rätvinkliga med spetsiga vinklar 45°, vilket medför att de är likbenta, så att $FEGD$ är en kvadrat. Betrakta trianglarna $\triangle BDF$ och $\triangle CDG$. Båda är rätvinkliga med hypotenusa $|BD| = |CD|$ och katet $|FD| = |GD|$. Av Pythagoras' sats följer att $|FB| = |GC|$. Vi får nu $|CE| + |BE| = |CG| + |GE| + |BE| = |FB| + |GE| + |BE| = |FE| + |GE| = 2|DF|$.

Låt nu $45° < \angle BAC < 90°$. Punkten E ligger då på sidan BC. Låt G som tidigare vara D:s ortogonalprojektion på höjden CE. Nu är fyrhörningen $CDEB$ inskriven i cirkeln med diameter BC, vilket betyder att $\angle DEB = 180° - \angle DCB = 180° - 45° = 135°$. Därmed får vi $\angle FED = 180° - 135° = 45°$ och det följer som tidigare att rektangeln $FEGD$ är en kvadrat. Höjden CE ligger inuti triangeln. Det medför att $\angle ECA = \angle GCD < \angle BCA = 45°$, så att $\angle GDC = 90° - \angle GCD > 45°$. Mot en större vinkel i en triangel ligger en större sida, så vi får $|CG| > |DG|$. Därmed gäller $|CE| = |CG| + |GE| = |CG| + |DF| > |DG| + |DF| = 2|DF|$, vilket betyder att $|CE| + |BE| \neq 2|DF|$.

Lösning 2. För $\angle ABC > 90°$ gäller att $|CE| + |BE| = 2|DF|$, medan för $\angle ABC < 90°$ (och spetsig vinkel vid A) gäller att $|CE| - |BE| = 2|DF|$. Därmed gäller ekvivalens. Vi ska visa den första implikationen, den andra visas analogt.

Låt $\angle ABC > 90°$. Eftersom $\angle ACB = 45°$ och $BD \perp DC$ följer att $|BD| = |DC|$. Trianglarna AEC och ADB är likformiga (vinkel-vinkel), så att

$$\frac{|AB| + |BE|}{|AD| + |DC|} = \frac{|AD|}{|AB|},$$

så att

$$|AB| \cdot |BE| = |AD|^2 + |AD| \cdot |DC| - |AB|^2 = |AD| \cdot |BD| - |BD|^2.$$

Vi kan beräkna triangeln ABC:s area på två sätt och får $|AB| \cdot |CE| = (|AD| + |DC|) \cdot |BD| = (|AD| + |BD|) \cdot |BD|$. Då gäller $|AB| \cdot (|CE| + |BE|) = |AD| \cdot |BD| + |BD|^2 + |AD| \cdot |BD| - |BD|^2 = 2|AD| \cdot |BD| = 2|AB| \cdot |DF|$, och påståendet följer.

6. Bestäm alla polynom $P(x) = ax^2 + bx + c$ med heltalskoefficienter a, b, c, där $a \neq 0$, sådana att

$$\frac{P(x-1)P(1-x)}{P(x)}$$

är ett heltal för alla heltal x för vilka $P(x) \neq 0$.

Lösning. Om polynomet $P(x-1)P(1-x)$ inte är delbart med $P(x)$, så kan vi använda division med rest och får

$$\frac{P(x-1)P(1-x)}{P(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{P(x)},$$

där $Q(x)$ är ett kvadratiskt polynom med rationella koefficienter och $R(x)$ är konstant eller linjärt, $R(x) \not\equiv 0$. Låt q vara den minsta gemensamma nämnaren för Q:s koefficienter, så att $Q(x)$ $(x \in \mathbb{Z})$ alltid har formen $\frac{p}{q}$ med $p \in \mathbb{Z}$. Om x är tillräckligt stort, så gäller $0 < \left|\frac{R(x)}{P(x)}\right| < \frac{1}{q}$, vilket innebär att $Q(x) + \frac{R(x)}{P(x)}$ inte är ett heltal. Detta är en motsägelse.

Det följer att $P(x-1)P(1-x)$ är delbart med $P(x)$. Låt polynomet P:s nollställen vara α och β. Enligt faktorsatsen för polynom har vi $P(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$, så att

$$\begin{aligned}\frac{P(x-1)P(1-x)}{P(x)} &= \frac{a(x-\alpha-1)(x-\beta-1)a(1-x-\alpha)(1-x-\beta)}{a(x-\alpha)(x-\beta)} \\ &= \frac{a(x-\alpha-1)(x-\beta-1)(x+\alpha-1)(x+\beta-1)}{(x-\alpha)(x-\beta)}.\end{aligned}$$

Täljaren $P(x-1)P(1-x)$ kan endast vara delbar med $P(x)$ om faktorerna $x-\alpha$ och $x-\beta$ förekommer även i täljaren, det vill säga om $\alpha, \beta \in \{\alpha+1, \beta+1, 1-\alpha, 1-\beta\}$. Vi undersöker alla förekommande fall:

- $\alpha = \alpha + 1$ är omöjligt.
- $\alpha = \beta + 1$: det följer att $\beta \in \{\beta+2, -\beta, 1-\beta\}$. Det finns två möjligheter: $\beta = 0$ $(\alpha = 1)$ eller $\beta = \frac{1}{2}$ $(\alpha = \frac{3}{2})$.
- $\alpha = 1 - \alpha$ implicerar att $a = \frac{1}{2}$. Det följer att $\beta \in \{\frac{3}{2}, \beta+1, 1-\beta\}$, som endast ger två möjligheter: $\beta = \frac{3}{2}$ eller $\beta = \frac{1}{2}$.
- $\alpha = 1 - \beta$: det följer att $\beta = 1 - \alpha$, och $\frac{P(x-1)P(1-x)}{P(x)} = a(x-\alpha-1)(x-\beta-1)$.

Det finns således två lösningar:

- $\alpha = \frac{1}{2}$ och $\beta = \frac{3}{2}$ (eller tvärtom):

  $P(x) = a\big(x - \frac{1}{2}\big)\big(x - \frac{3}{2}\big) = a\big(x^2 - 2x + \frac{3}{4}\big) = ax^2 - 2ax + \frac{3a}{4} = \frac{a}{4}(4x^2 - 8x + 3)$,

  det vill säga $P(x)$ är en multipel av $4x^2 - 8x + 3$.
- $\alpha + \beta = 1$:

  $$P(x) = a(x-\alpha)(x-1+\alpha) = ax^2 - ax + a\alpha(1-\alpha),$$

  det vill säga $b = -a$ (c kan vara ett godtyckligt heltal).

Alternativ: Analysen av täljarens och nämnarens nollställen kan ersättas av analys av resten vid polynomdivision. Vi dividerar faktorerna i täljaren med nämnaren var för sig och får

$$\frac{P(x-1)}{P(x)} = 1 + \frac{-2ax + a - b}{P(x)},$$

och

$$\frac{P(1-x)}{P(x)} = 1 + \frac{(a+b)(1-2x)}{P(x)}.$$

Detta ger

$$\begin{aligned}\frac{P(x-1)P(1-x)}{P(x)} &= \text{ polynom } + \frac{(a+b)(4ax^2+(2b-4a)x+(a-b))}{ax^2+bx+c} \\ &= \text{ polynom } + \frac{(a+b)((-4a-2b)x+(a-b-4c))}{P(x)}.\end{aligned}$$

Resten är identiskt lika med noll för $a+b=0$ och för $P(x) =$ en multipel av $4x^2-8x+3$.