SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 27 september 2016

1. Kims väg till skolan leder förbi flera trafikljus som är jämnt utspridda på vägen, det vill säga de delar vägen i lika långa sträckor. Inget trafikljus ligger vid starten, och inget ligger vid skolan. En morgon känner Kim för att förlänga sin väg på morgonen och bestämmer sig för följande: vid varje trafikljus som lyser grönt går Kim vidare; vid varje trafikljus som lyser rött backar Kim till föregående trafikljus (eller hem, om det är det första ljuset) och vänder sen mot skolan igen. Kim backar högst en gång vid varje trafikljus. Om Kims väg den morgonen blivit dubbelt så lång som vanligt, visa att det den dagen varit fler trafikljus som lyst rött än grönt. Hur många fler kan det ha varit?

Lösning. Beteckna antalet trafikljus med n. Dessa delar då Kims väg till skolan i $n + 1$ lika långa sträckor. Sträckan omedelbart före ett grönt ljus genomlöps en gång, medan sträckan omedelbart före ett rött ljus genomlöps tre gånger. Den sista sträckan genomlöps en gång. Kims totala väg en vanlig dag är $n + 1$ längdenheter lång. Den aktuella dagen är den $2(n + 1)$ längdenheter lång.

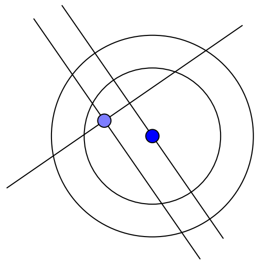
Låt k vara antalet trafikljus som lyst grönt vid Kims ankomst. Antalet trafikljus som lyst rött måste då vara $n - k$. Vi har

$$k \cdot 1 + (n - k) \cdot 3 + 1 = 2n + 2 \text{ (längdenheter)},$$

eller $n - 2k = 1$, så att $n - k = k + 1$, det vill säga antalet trafikljus som lyste rött var med ett större än antalet som lyste grönt.

2. Betrakta två olika koncentriska cirklar och cirkelringen mellan dem. Två räta linjer som är vinkelräta mot varandra skär varandra inuti den mindre cirkeln och delar därmed cirkelringen i fyra delar. Man målar delarna i vitt och svart på ett sådant sätt att delar som gränsar till varandra har olika färg. Visa att de vita delarna av ringen tillsammans har samma area som de svarta delarna tillsammans.

Lösning. Om en av linjerna går genom de två cirklarnas gemensamma medelpunkt får vi spegelsymmetri mellan vita och svarta delar, vilket gör att påståendet är uppenbart sant (se figur). I annat fall kan vi parallellförflytta den ena linjen till en linje genom den gemensamma medelpunkten. Eftersom bitarna som två parallella linjer skär av cirkelringen är kongruenta, är arean av den svarta bit man skär bort lika stor som arean av den svarta bit som tillkommer. Därmed blir summan av de svarta delarnas areor för de två givna linjerna lika med summan av de svarta delarnas areor i fallet med den parallella linjen genom medelpunkten, vilket visar påståendet.



3. Bestäm alla positiva heltal a, b, c, sådana att

$$\begin{cases} abc & = 2016, \\ (a-1)(b-1)(c-1) & = 1573. \end{cases}$$

Lösning. Vi börjar med att primtalsfaktorisera de två högerleden:

$$2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7, \quad 1573 = 11^2 \cdot 13.$$

Den andra ekvationen kan då skrivas som $(a-1)(b-1)(c-1) = 11^2 \cdot 13$.

Låt oss till en början anta att $a \le b \le c$. Ur den andra ekvationen följer då att $a - 1 = 1$, eller $a - 1 = 11$, det vill säga $a = 2$, eller $a = 12$.

Fall 1. $a = 2$: Ekvationssystemet för de två övriga obekanta b och c får då utseendet $bc = 1008$, $(b-1)(c-1) = 1573$. Detta ekvationssystem saknar lösningar, eftersom $(b-1)(c-1) < bc$, medan $1573 > 1008$.

Fall 2. $a = 12$: Den enda möjligheten här är $a = b = 12$, $c = 14$. Direkt insättning visar att $12 \cdot 12 \cdot 14 = 2016$, så vi har hittat en lösning.

Av symmetriskäl får vi att ekvationssystemets alla lösningar ges av triplarna

$$(12, 12, 14), \ (12, 14, 12), \ (14, 12, 12).$$

4. Bestäm alla reella lösningar till ekvationen

$$x^3 - \sqrt{x^2 - 1} + 1 = 0.$$

Lösning. För att vänsterledet ska vara definierat måste $|x| \ge 1$ gälla. Vi ska titta separat på fallen $x \ge 1$, $x < -1$, $x = -1$.

Om $x \ge 1$ så gäller $x^3 + 1 > x^3 \ge x > \sqrt{x^2 - 1}$. Därmed är $x^3 - \sqrt{x^2 - 1} + 1 > 0$, och vi får att det inte finns några lösningar som uppfyller $x \ge 1$.

För $x < -1$ har vi $x^3 < -1$, vilket, eftersom $\sqrt{x^2-1} > 0$, medför att $x^3 - \sqrt{x^2-1} + 1 < x^3 + 1 < 0$. Det finns alltså inga lösningar sådana att $x < -1$.

Det återstår att titta på fallet $x = -1$. Insättning visar att det är en lösning, som därmed är den enda lösningen.

5. Triangeln ABC är inskriven i en cirkel. Tangenten till cirkeln i hörnet B är parallell med bisektrisen till vinkeln vid A, och tangenten i hörnet A är parallell med bisektrisen till vinkeln vid C. Bestäm triangelns vinklar.

Lösning. Beteckna triangelns vinklar vid A, B, C med α, β, γ, respektive.

De båda tangenterna kan inte vara parallella, eftersom två bisektriser i en triangel inte kan vara det. Det betyder att kordan AB inte kan vara diameter i cirkeln. De två tangenterna kommer att skära varandra i en punkt P på den sida sträckan AB som den lilla cirkelbågen ligger på. Triangeln ABP är likbent, och därmed är dess vinklar vid A och B spetsiga. Hörnet C kan inte ligga på den mindre bågen, då skulle bisektrisen från A ligga inuti triangeln ABP och den skulle inte kunna vara parallell med BP. Därmed är vinkeln vid C spetsig. I fyrhörningen $AOBP$, där O är cirkelns medelpunkt, är vinklarna vid A och vid B räta, och vinkeln vid O är lika med 2γ. Vinkeln vid P är därmed $180° - 2\gamma$, och vinklarna vid A och B i $\triangle ABP$ blir γ. (Man kan få de två vinklarna direkt med hjälp av korda-tangentsatsen.) Av parallellitetsvillkoren följer nu att $\angle ABP = \frac{\alpha}{2}$, så att $\alpha = 2\gamma$, och $\angle BAP = 180° - \alpha - \dfrac{\gamma}{2} = \beta + \dfrac{\gamma}{2}$, vilket ger $\gamma = 2\beta$. Därmed har vi $7\beta = 180°$.

Triangelns tre vinklar är alltså $\alpha = 4\beta = \frac{720°}{7},\ \beta = \frac{180°}{7},\ \gamma = \frac{360°}{7}$.

6. Låt b vara ett fixt positivt heltal. En talföljd som består av positiva heltal bildas enligt följande regel: Om ett tal a i följden är jämnt, ges nästa tal av $\frac{a}{2}$. Om ett tal a i följden är udda, ges nästa tal av $2a + b$. För vilka b når talföljden alltid 1 oavsett startpunkt?

Lösning. Vi måste för varje givet b *antingen* visa att alla startpunkter ger en talföljd som når 1, *eller* att det finns någon startpunkt som ger en talföljd som aldrig når 1.

Om b är ett *udda* heltal och startpunkten s är udda leder det till talföljden $s \to 2s + b \to 2(2s + b) + b \to 2(2(s + b) + b) + b \to \dots$ med idel udda tal, som alltid ökar, och därför aldrig når 1. Specifikt leder startpunkten b till följden $b \to 3b \to 7b \to \dots$. I detta fall når alltså talföljden *inte* 1 oavsett startpunkt. (Notera också att ovanstående resonemang ger att endast startpunkter på formen $s = 2^n$ för något heltal n når 1.)

Antag nu att b är ett *jämnt* tal, $b = 2c$. Om c är udda så leder startpunkten c till talföljden $c \to 4c \to 2c \to c$, vilken sedan upprepar sig. Om $c > 1$ så finns det alltså då talföljder som aldrig når 1. Vi återvänder till fallet $b = 2$ (alltså $c = 1$) senare.

Om c är jämnt och startpunkten a är ett udda tal så är $a+c$ udda, och vi får talföljden $a \to 2a + 2c \to a + c \to 2a + 4c \to a + 2c \to 2a + 6c \to a + 3c \to \dots$, vilken i och för sig inte ökar monotont, men växer utan gräns och aldrig underskrider a, och därför aldrig når 1.

Kvar är fallet $b = 2$. En jämn startpunkt a leder då i ett steg till det strikt mindre talet $a/2$. En udda startpunkt a leder, eftersom $a + 1$ då är jämnt, i tre steg till $a \to 2a + 2 \to a + 1 \to (a + 1)/2$, där $(a + 1)/2 < a$ om $a > 1$. Notera att om $a = 1$ har vi inget att bevisa. Sammantaget så ger dessa två fall för a att följden kommer att avta från varje punkt, antingen i ett steg, eller i tre steg, beroende på om vi utgår från ett jämnt eller udda tal. Följden leder därför till 1 oavsett startpunkt.

Som svar på frågan gäller att följden alltid når 1 oavsett startpunkt endast då $b = 2$.