SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 30 september 2014

1. Ett tåg kör fram och tillbaka dygnet runt mellan Aby och Bro med lika långa uppehåll vid ändstationerna, och med samma tidtabell alla dagar i veckan. Under varje resa stannar tåget endast en gång, vid Mo.

Jens åker med tåget från Aby, stiger av i Mo för att handla och återvänder till Aby när tåget nästa gång stannar i Mo. Hans uppehåll i Mo har då varat 50 min. Jenny åker från Bro till Mo, och åker sedan hem nästa gång tåget stannar på väg mot Bro. Hennes uppehåll i Mo blir 30 min.

Hur många gånger stannar tåget i Mo under ett dygn? Vi bortser från den tid det tar för tåget att stanna till i Mo, samt antar att tåget är i rörelse vid midnatt.

Lösning 1. Av villkoret följer att resan från Mo till Bro och tillbaka, inklusive uppehåll, tar 50 minuter, medan resan från Mo till Aby och tillbaka, inklusive uppehåll, tar 30 minuter. En resa från Aby till Bro och tillbaka, med båda uppehållen, tar alltså 80 minuter. På ett dygn hinner tåget göra

$$\frac{24 \cdot 60}{80} = 18$$

resor från Aby till Bro och tillbaka. Under en sådan resa passeras Mo två gånger. Totalt kommer tåget alltså att passera Mo 36 gånger under ett dygn.

Lösning 2. Här antar vi att tåget kör med konstant fart.

Beteckna med t_A den tid det tar för tåget att åka mellan Aby och Mo, med t_B den tid det tar att åka mellan Mo och Bro, samt med u tiden för ett uppehåll vid någon av ändstationerna, där alla tider mäts i minuter. Uppgifterna vi fått om Jens resa ger att

$$t_B + u + t_B = 2t_B + u = 50,$$

och uppgifterna om Jennys resa säger att

$$t_A + u + t_A = 2t_A + u = 30.$$

Om vi lägger ihop likheterna får vi att

$$t_A + t_B + u = 40 \text{ minuter.}$$

Antalet gånger tåget passerar Mo på ett dygn är lika med antalet gånger det åker mellan två ändstationer, och är lika med

$$\frac{24 \cdot 60}{40} = 36.$$

Notera att vi fick ett heltal, vilket betyder att man kan ha fast tidtabell.

2. Medelvärdet av tolv reella tal är 20. Medelvärdet av de tal som är större än 20 är 27, medan medelvärdet av de tal som är mindre än 20 är 17. Visa att minst ett av de tolv talen måste vara lika med 20.

Lösning 1. Antag att inget av de tolv talen är lika med 20. Beteckna med m antalet tal som är mindre än 20. Enligt antagandet är det $12 - m$ tal som är större än 20. Vi har då

$$17m + 27(12 - m) = 12 \cdot 20 = 240,$$

så att

$$10m = 84,$$

vilket är omöjligt, då m är ett positivt heltal. Det bevisar att det måste finnas tal lika med 20 bland de tolv givna talen.

Lösning 2. Låt x, y, och z vara antalet tal som är mindre än, lika med, och större än 20, respektive. Ur villkoren följer att $x > 0,\ z > 0$, medan $y \geq 0$. Vi vill visa att även y är ett positivt heltal. För summan av de tre talen får vi

$$20\,(x + y + z) = 17x + 20y + 27z,$$

så att $3x = 7z$. Eftersom 3 och 7 är relativt prima, och x och z är positiva heltal, måste x vara delbart med 7, medan z måste vara delbart med 3. Vi sätter $x = 7k,\ z = 3k$, där k är ett positivt heltal, och får $12 = x + y + z = y + 10k$. Den enda möjliga positiva heltalslösningen är $k = 1$, vilket ger $y = 2 > 0$.

3. Punkterna P, Q, R och S väljs på sidorna av kvadraten $ABCD$, så att P ligger på AB, Q på BC, R på CD och S på DA, och så att sträckorna AP, BQ, CR, DS är lika långa. Punkten M inuti kvadraten $ABCD$ är sådan att arean av fyrhörningen $SDRM$ är 24 cm^2, arean av $RCQM$ är 41 cm^2 och arean av $QBPM$ är 70 cm^2. Bestäm arean av fyrhörningen $PASM$. (Du kan ta för givet att det finns en punkt M som uppfyller villkoret.)

Lösning 1. Drag DM och BM. Trianglarna $\triangle DSM$ och $\triangle BQM$ har lika bas (eftersom $DS = BQ$) och deras höjd tillsammans är kvadratens sida. På motsvarande sätt har trianglarna $\triangle DRM$ och $\triangle PBM$ samma bas ($DR = BP$) och sammanlagda höjd kvadratens sida. Därmed måste den sammanlagda arean av fyrhörningarna $SDRM$ och $QBPM$ vara hälften av kvadratens area, och är alltså lika med summan av de två andra fyrhörningarnas areor. Arean av fyrhörningen $PASM$ blir alltså $24 + 70 - 41 = 53$ cm^2.

Lösning 2. De fyra rätvinkliga trianglarna APS, BQP, CRQ, DSR är kongruenta (sida - vinkel - sida), vilket medför att deras hypotenusor är lika långa, och att deras vinklar vid var och en av punkterna P, Q, R, S har summan $90°$. Fyrhörningen $PQRS$ har alltså lika långa sidor och räta vinklar och är därmed också en kvadrat. Beteckna sidlängden i $PQRS$ med b.

Antag att punkten M ligger innanför kvadraten $PQRS$ (eller på en av dess sidor). Trianglarna $\triangle MSP$ och $\triangle MQR$ har samma bas b, och summan av deras höjder mot basen b är lika med b. Samma resonemang gäller trianglarna $\triangle MPQ$ och $\triangle MRS$. Summan av areorna av ett sådant par trianglar är alltså hälften av den mindre kvadratens area. Detta och de fyra rätvinkliga trianglarnas kongruens medför att den sammanlagda arean av fyrhörningarna $SDRM$ och $QBPM$ är hälften av den stora kvadratens area, och kalkylen fortsätter som i den första lösningen.

Om punkten M ligger utanför den mindre kvadraten $PQRS$, så måste man ersätta summan av två trianglars areor med en skillnad, exempelvis om M ligger innanför $\triangle CRQ$, så gäller att arean av $\triangle MSP$ minus arean av $\triangle MQR$ är halva den mindre kvadratens area. Summan av de två andra trianglarnas areor är fortfarande lika med halva den mindre kvadratens, och lösningen fortsätter som tidigare.

4. Sträckorna AP och BQ är höjder i triangeln ABC. Triangelns vinkel vid hörnet C är $100°$. Punkten M är mittpunkt på sidan AB. Bestäm vinkeln PMQ.

Lösning 1. Punkterna P och Q ligger utanför triangeln, på förlängningen av BC, respektive AC, eftersom vinkeln vid C är trubbig. Det betyder att strålarna MA, MP, MC, MQ, MB ligger i planet i just den ordningen (medurs eller moturs), i annat fall skulle P eller Q ligga på triangelns sidor. Vinklarna APB och BQA är räta, vilket medför att punkterna P och Q ligger på en halvcirkel med diameter AB och medelpunkt M. Vi har

$$\angle PAQ = 90° - \angle ACP = 90° - (180° - 100°) = 10°.$$

Vinkel PAQ är inskriven i cirkeln med medelpunkt M och diameter AB, så den måste vara lika med halva medelpunktsvinkeln på samma båge, som är $\angle PMQ$. Vi får därmed $\angle PMQ = 20°$.

Lösning 2. Medianen mot hypotenusan i en rätvinklig triangel är hälften så lång som hypotenusan (följer bland annat av att den räta vinkeln står på en halvcirkel, vilket kommenterades i den första lösningen). Trianglarna QAM och BPM är alltså likbenta, med basvinklar $\angle QAM = \angle AQM = \angle BAC$, och $\angle BPM = \angle PBM = \angle ABC$. Det följer att $\angle AMP = 2\angle ABC$, och $\angle BMQ = 2\angle BAC$. Givet strålarnas inbördes ordning som kommenterades tidigare, får vi alltså

$$\begin{aligned}\angle PMQ &= 180° - 2\angle ABC - 2\angle BAC = 2(180° - \angle ABC - \angle BAC) - 180° = \\ &= 2\angle ACB - 180° = 200° - 180° = 20°.\end{aligned}$$

5. I en skolklass får en elev en påse med 2014 enkronor från läraren medan de övriga eleverna inte har några pengar alls. Varje gång två elever träffas delar de pengarna de har tillsammans lika om det är ett jämnt antal kronor, medan de lägger en krona i klasskassan och delar lika på resten om de har ett udda antal kronor tillsammans. Efter lång tid har detta hänt många gånger och det visar sig att alla pengarna ligger i klasskassan. Hur många elever måste det minst ha varit i klassen?

Lösning. Vi ska först visa att det inte kan vara 11 elever eller färre.

Notera att om två personer som har pengar möts har båda efter mötet minst lika mycket var som den "fattigare" av dem hade före mötet. Vid sådana möten kan inte den minimala summan hos eleverna med pengar minska. För att så småningom kunna "nolla" alla måste man alltså låta dem möta elever med 0 kr. Om man strax före ett möte har s personer med 0 kr, och alla som har pengar har minst $2x$ kr var, så kommer man efter mötet att ha $s-1$ med 0 kr, och alla andra kommer att ha minst x kr var.

Om vi börjar med 2^{10} kr, så kommer det alltså efter tio möten med elever med 0 kr att vara ett minimum på minst 1 kr, och det kommer att krävas minst en elev till med 0 kr för att öka antalet nollor. Eftersom $2014 > 1024 = 2^{10}$, så kommer det inte att räcka med 11 personer för att få nollor överallt.

Vi visar att det kan vara 12 elever i klassen med ett exempel. Numrera de tolv eleverna 1–12, där eleven som fått pengapåsen har nummer 1. Antag sedan att följande möten äger rum successivt: elev 1 med 2, 2 med 3, ..., 10 med 11. Efter mötet 10–11 kommer eleverna att ha följande summor

1: 1007 kr: 2; 503 kr: 3; 251 kr; 4: 125 kr; 5: 62 kr; 6: 31 kr; 7: 15 kr; 8: 7 kr; 9: 3 kr; 10: 1 kr; 11: 1 kr

Elev 12 har inte träffat någon och har 0 kr, och kan "nolla" elever 10 och 11. Om elev 10 nu möter elev 9, får vi att de sista har summorna: 9: 1; 10: 1; 11:0; (12: 0).

Vi lagar så att elev 9 också har 0 kr, genom att fixa möten med elever 10 och 11. Det räcker alltså med två som inte har pengar för att "nolla" en som har 3 kr. Om nu elev 9 möter elev 8, kommer de att ha 3 kr var efter mötet, och kan bli "nollade" av elever 10 och 11. Det räcker alltså med tre nollor för att ta pengarna ifrån någon som har 7 kr. Om vi fortsätter resonera på det sättet får vi att det varje ny nolla räcker för att få en nolla till högre upp på listan. Därmed kommer även elev 1 att kunna "nollas".

Kommentar: Med hjälp av matematisk induktion kan man precisera ovanstående resonemang och visa ett generellt påstående, nämligen att en grupp som består avr av n personer kan flytta över högst $2^{n-1}-1$ kr till den gemensamma kassan. För de intresserade följer även det beviset nedan.

I det följande anser vi inte en delning av pengar mellan två personar där båda har 0 kronor vara en äkta delning.

Låt oss anta att vi börjar med k kr. Med hjälp av induktion kan vi visa ett lemma: Påståendet

- P_n: n elever kan aldrig (genom att använda operationen beskriven i uppgiften många gånger) få varje elevs (som *har* varit involverad i en äkta delning) pengar under k heltalsdelat med 2^{n-1}.

är sant för alla positiva heltal n.

Induktionsbas: P_1 är sant eftersom eleven inte har någon att dela med.

Induktionssteg: Antag att P_{n-1} är sant. Vi vill visa att P_n också är sant. Antag att man delar optimalt till att minimera antalet kronor hos en av de involverade eleverna.

Om det finns en elev som aldrig är involverad i en äkta delning så följer detta från P_{n-1}. Nu återstår bara det fall där alla är involverade i en äkta delning. Vi kan utan inskränkning anta att elev nummer n är den sista som är involverad i en äkta delning. Låt $k_1, \ldots, k_{n-1}, 0$ vara vad eleverna har i kronor precis innan elev nummer n är med i en äkta delning. Enligt induktionsantagandet är $k_i \geq (k$ heltalsdelat med $2^{n-2})$. Det medför att om $k'_1, \ldots, k'_n$ är vad eleverna har efter en delning till, så är alla $k'_i \geq$ (2014 heltalsdelat med 2^{n-1} (en delning till kan bara halvera beloppet). Nu ser vi att alla efterföljande delningar bevarar detta (en delning bevarar minimum). Så induktionssteget är bevisat, och enligt induktionsaxiomet gäller påståendet för alla positiva heltal n.

Det följer från lemmat att om det finns n elever kan vi inte komma ned till att alla har 0 kronor om $k \geq 2^{n-1}$.

Vi argumenterar nu induktivt att man med n elever kan få $2{*}n - 1{-}1$ kr i klasskassen. Påståendet

- Q_n: Med n elever där elev 1 börjar med mindre än 2^{n-1} kronor och alla andra med 0 kronor kan man få alla pengarna i klasskassen.

är sant för alla positiva heltal n.

Eftersom $2^0 = 1$ är detta sant for $n = 1$, då elev 1 börjar utan pengar. Anta Q_{n-1} är sant - vi vill visa Q_n. Först delas pengarna mellan elev 1 och 2. Nu ser vi att om vi ignorerar elev 1 har vi en situation som motsvarar antagningen i Q_{n-1}. Så genom att använda induktionsantagandet kan vi komma till en ny situation där de $n-1$ sista eleverna igen inte har några pengar. Detta kan vi göra igen och igen och eftersom antalet kronor som elev 1 har blir mindre och mindre måste vi till slut ha att alla pengarna är i klasskassen.

6. Låt a och b vara två positiva heltal sådana att $8a^2 + 2a = 3b^2 - b$. Visa att både $2a + b$ och $4a - 2b + 1$ är kvadrater av heltal.

Lösning. Först noterar vi att produkten av de båda talen kommer att innehålla snarlika termer som det givna sambandet. Multiplikation, tillsammans med sambandet, ger $(2a + b) \cdot (4a - 2b + 1) = 8a^2 + 2a - 2b^2 + b = b^2 > 0$. Det följer att båda talen är positiva, eftersom det ena av dem uppenbarligen är det.

Antag nu att ett primtal p delar talet $2a + b$. Då delar p också de två talens produkt, alltså b^2. I så fall delar p talet b, och eftersom p var en delare till $2a + b$, så måste p vara en delare till $2a$.

Eftersom vi nu vet att p delar $2a$ samtidigt som p delar b, finner vi att p inte kan vara delare till $4a - 2b + 1 = 2(2a - b) + 1$. Därmed saknar talen $2a + b$ och $4a - 2b + 1$ gemensamma delare större än 1. Varje primtalsfaktor p i högerledet b^2 kommer att finnas i en jämn potens, eftersom högerledet är en kvadrat. Då de två faktorerna i vänsterledet är relativt prima, måste alla exemplar av p finnas i en av dem. Därmed innehåller de två faktorerna endast jämna potenser av sina primtalsdelare, och de är därmed kvadrater av heltal.