SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 29 september 2015

1. I ett stafettlopp springer den första personen i varje lag 100 meter plus en tiondel av det då kvarvarande avståndet till målgång. Den andra personen springer 200 meter plus en tiondel av det då kvarvarande avståndet till målgång. Den tredje personen springer 300 meter plus en tiondel av det då kvarvarande avståndet till målgång, o.s.v. Alla löpare springer en sträcka var, och dessa sträckor är lika långa. Hur många löpare ingår i ett lag?

Lösning. Beteckna hela loppets längd (i meter) med x. Eftersom de två första löparna i varje lag ska springa lika långa sträckor, kan vi ställa upp ekvationen

$$100 + \frac{1}{10}(x - 100) = 200 + \frac{1}{10}\left(x - 100 - \frac{1}{10}(x - 100) - 200\right),$$

som kan förenklas till

$$900 + x = 1800 + x - 100 - \frac{1}{10}x + 10,$$

och det följer att

$$x = 8100\,\text{m}.$$

Om vi sätter in avståndet i den första ekvationen ovan, får vi att de två första löparna sprungit 900 m var. Det torde betyda att det måste vara 9 löpare i varje lag.

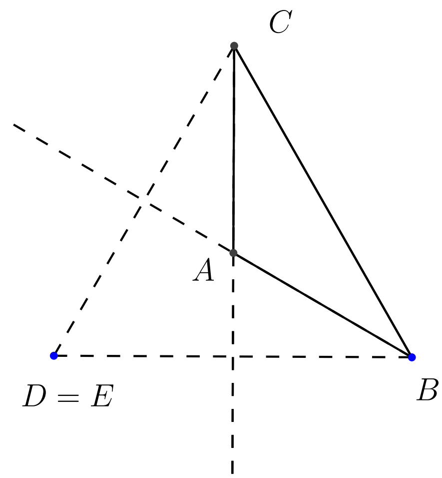
Hittills har vi bara garanti för att de två första löparna i varje lag springer lika långt. Nu kan vi notera att om alla löpare med nummer mindre än k, $k \leq 9$, sprungit 900 m var, så kommer även löparen med nummer k att springa 900 m. Enligt villkoret kommer löparen med nummer k att springa

$$100k + \frac{1}{10}(8100 - 900(k-1) - 100k) = 100k + 810 - 90k + 90 - 10k = 900\,\text{m}.$$

Notera också att uttrycket $8100 - 900(k-1) - 100k$ blir noll för $k = 9$, så att den nionde och siste löparen kommer att springa $900 + \frac{1}{10} \cdot 0\,\text{m}$.

2. Givet triangeln ABC, låt punkten D vara spegelbilden av punkten B vid spegling i linjen som innehåller hörnen A och C, och låt punkten E vara spegelbilden av punkten C vid spegling i linjen som innehåller hörnen A och B. Bestäm vinklarna i triangeln ABC om punkterna D och E sammanfaller.

Lösning 1. Linjen CA måste vara vinkelrät mot sträckan BD och dela den mitt itu. Likadant måste linjen BA vara vinkelrät mot sträckan $CD\,(=CE)$ och dela den mitt itu. Det följer att det bildas två par kongruenta rätvinkliga trianglar (sida-vinkel-sida), vilket ger att $BD = BC$, och $CD = CB$. Triangeln DBC är därmed liksidig. Dess höjder är samtidigt bisektriser till vinklarna, så att $\angle ABC = \frac{1}{2}\angle DBC = 30°$, och $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle DCB = 30°$. Den sista vinkeln i triangeln ABC är $\angle BAC = 180° - 30° - 30° = 120°$.



Lösning 2. Sträckorna BC och DC är varandras spegelbilder och därmed lika långa. Samma gäller sträckorna BC och BD. Triangeln DBC är därmed liksidig, och lösningen kan avslutas som ovan.

3. Anna, Bertil och Cecilia ska koka varsitt ägg. De tre äggen ska läggas samtidigt i en kastrull med kokande vatten. Anna vill ha sitt ägg kokt i fem minuter, Bertil vill ha sitt kokt i sex minuter, och Cecilia vill ha sitt kokt i sju minuter. Till sin hjälp har de endast tre timglas – ett fyraminuters, ett sjuminuters och ett tiominuters. Varje timglas kan vändas flera gånger. Hur ska de gå tillväga så att alla tre blir nöjda?

Lösning. Viktigt är att notera att de enda identifierbara tidpunkterna är de, vid vilka något av timglasen vänds (vilket antas ske på nolltid). Här är en fungerande variant:

Man startar sju- och tiominuterstimglasen samtidigt. Efter att sanden i sjuminutersglaset runnit ut vänder man det och startar samtidigt fyraminuterstimglaset. Alla tre timglasen vänds när sanden runnit ur. Äggen läggs i det kokande vattnet när sjuminuterstimglaset vänds för andra gången, d.v.s. fjorton minuter efter det att man började. I det läget är det sex minuter kvar på tiominutersglaset, och en minut kvar på fyraminutersglaset. Med en vändning till av fyraminuterstimglaset fås alla tre koktiderna som önskas.

Alternativ lösning. Några av fjolårets finalister fann att man kan klara av problemet med endast fyra- och sjuminuterstimglasen. Med hjälp av dessa två kan man konstruera en "klocka" som mäter en minut i taget. Här är en skiss av hur det går till:

$$\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix} \to_{4\text{ min}} \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \to_{0\text{ min}} \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} \to_{3\text{ min}} \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix} \to_{0\text{ min}} \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix} \to_{1\text{ min}}$$

$$\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\1\end{pmatrix} \to_{0\text{ min}} \begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\6\end{pmatrix} \to_{1\text{ min}} \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\7\end{pmatrix} \to_{0\text{ min}} \begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}7\\0\end{pmatrix} \to_{1\text{ min}}$$

etc.

4. Bestäm det minsta positiva heltal n, som samtidigt kan skrivas som en summa av nio på varandra följande heltal, som en summa av tio på varandra följande heltal, och som en summa av elva på varandra följande heltal.

Lösning. Låt n vara ett tal som uppfyller villkoret. Vi har då att det finns heltal k, l, m, inte nödvändigtvis positiva, sådana att

$$n = 9k + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 10l + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 =$$
$$= 11m + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10.$$

Vi har alltså likheterna

$$n = 9k + 36 = 9(k + 4), \quad n = 10l + 45 = 5(2l + 9), \quad n = 11m + 55 = 11(m + 5),$$

vilket betyder att n är delbart med $9, 5$ och 11. Eftersom de tre talen är parvis relativt prima, är det minsta positiva heltalet delbart med alla tre lika med deras produkt, $9 \cdot 5 \cdot 11 = 495$. Vi ska visa att 495 uppfyller villkoret:

$$\frac{495 - 36}{9} = 51; \qquad \frac{495 - 45}{10} = 45; \qquad \frac{495 - 55}{11} = 40,$$

vilket betyder att villkoret uppfylls med $k = 51,\ l = 45,\ m = 40$.

5. Kvadraten $ABCD$ har sidlängd a. Punkterna E på sidan AB och F på sidan CD är sådana att $|AE| = 2|BE|$ och $|DF| = 4|CF|$. Diagonalen BD skär sträckan CE i punkten P, och diagonalen AC skär sträckan BF i punkten Q. Beräkna arean av fyrhörningen $BCQP$.

Lösning. Enligt topptriangelsatsen är trianglarna BPE och DPC likformiga. Av samma anledning är trianglarna CQF och AQB likformiga. Detta ger

$$\frac{BP}{DP} = \frac{BE}{DC} = \frac{1}{3}, \quad BP = \frac{1}{4}BD, \quad \frac{CQ}{AQ} = \frac{CF}{AB} = \frac{1}{5}, \quad CQ = \frac{1}{6}AC,$$

så att $OP = \dfrac{a\sqrt{2}}{4}$, $OQ = \dfrac{a\sqrt{2}}{3}$. Den sökta arean är lika med $\dfrac{1}{4}a^2 - \dfrac{1}{2}OP \cdot OQ = \dfrac{a^2}{6}$.

6. Tjugofem tennisspelare är numrerade med talen $1, 2, \ldots, 25$. De är indelade i fem lag med fem spelare i varje på sådant sätt att summan av spelarnas nummer i varje lag är lika med 65. I en turnering spelar varje spelare mot alla andra spelare utom dem i det egna laget. Efter turneringen visade det sig att alla matcher vanns av den av de två spelarna som hade högre nummer. Vi säger att lag X vinner mot lag Y om spelarna i lag X vunnit fler matcher än de förlorat när de mött spelare från lag Y. Visa att det finns tre lag A, B, C, sådana att A vinner mot B, B vinner mot C, och C vinner mot A.

Lösning. Först ska vi visa att inget lag kan ha vunnit alla sina matcher. Antag att det finns ett sådant lag. Det skulle då ha minst $13 \cdot 4 = 52$ vinster på individuell nivå, medan villkoret för spelarnas nummer ger att det har exakt $i_1 - 1 + i_2 - 2 + i_3 - 3 + i_4 - 4 + i_5 - 5 = 65 - 15 = 50$ vinster, där vi (utan inskränkning) antagit att $i_1 < i_2 < i_3 < i_4 < i_5$. Inget lag kan alltså ha vunnit alla sina matcher. Det betyder att det finns en cykel av lag $L_1, L_2, \ldots, L_k$ sådana att L_2 vunnit mot L_1, L_3 vunnit mot L_2, $\ldots$, L_1 vunnit mot L_k. Bland alla sådana cykler, välj en av dem med minst längd (det är möjligt, eftersom antalet cykler är ändligt). Om $k = 3$ är vi klara. Antag att $k > 3$. Betrakta resultatet mellan L_1 och L_{k-1}. Om L_1 förlorade den matchen, får vi en cykel av tre lag L_1, L_{k-1}, L_k, en motsägelse med att k var den minimala längden för en sådan cykel. Om L_1 vann matchen, får vi en cykel av längd $k-1$, nämligen $L_1, \ldots, L_{k-1}$, återigen en motsägelse. Det följer alltså att $k = 3$, och påståendet är bevisat.