SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 24 september 2013

1. Längs en lång vandringsled finns markeringar för antalet passerade kilometer efter varje kilometer, med början vid starten där det står markering 0. En vandrare som börjar gå vid vandringsledens start ägnar sig åt att räkna siffrorna i dessa markeringar. Hur många kilometer har vandraren gått vid den kilometermarkering som innehåller den 2013:e siffran?

2. I en stad som ligger på gränsen mellan två länder kan man fritt använda ländernas respektive valutor daler och mark. Dag köar bakom två flickor och tre pojkar vid en biograf. Han noterar att flickorna betalar sina båda biljetter med en tiodalerssedel och får åtta mark tillbaka. Pojkarna betalar sina tre biljetter med en trettiomarkssedel och får nio daler tillbaka. Dag lyckas betala för sin biljett med jämna pengar genom att enbart använda endalersmynt och enmarksmynt. Hur många mynt av vardera slaget behöver han för detta?

3. Två koncentriska cirklar (det vill säga två cirklar med samma medelpunkt) har radier a och b, där $b > a$. Låt PQ vara en diameter i den större cirkeln. En linje genom Q tangerar den mindre cirkeln i punkten T. Bestäm längden av sträckan PT uttryckt i a och b.

4. På ett papper har Ida på en rad skrivit 27 positiva heltal, ordnade efter storlek. Det första talet är 1 och det sista är 25. Ida berättar för Emil att summan av samtliga tal är 127, att summan av de nio första talen är 21, samt att summan av de nio sista talen är 65. Räcker den informationen för att Emil ska kunna avgöra vilket tal det är som står i mitten?

5. Låt a och b vara positiva heltal. Betrakta de ab punkter med heltalskoordinater (i, j) som uppfyller att $0 \leq i < a$, och $0 \leq j < b$. Var och en av dessa punkter färgas i en av k, $k \geq 2$, olika färger som är numrerade från 0 till $k - 1$. I punkten med koordinater (i, j) ges färgens nummer av resten vid heltalsdivision av $i + j$ med k. Om varje färg förekommer i lika många punkter, visa att minst ett av talen a och b är jämnt delbart med k.

6. Punkterna P, Q, R är valda på sidorna BC, CA, AB i en triangel ABC på ett sådant sätt att PQ, QR, RP delar triangeln ABC i fyra likformiga trianglar. Visa att åtminstone två av dessa måste vara kongruenta (det vill säga likformiga och lika stora). Ge också ett exempel (med motivering) som visar att alla fyra inte behöver vara kongruenta.

Skrivtid: 5 timmar
Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!
Lösningarna kommer att finnas utlagda på www.mattetavling.se efter den 22 oktober.