SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 2 oktober 2007

Förslag till lösningar

1. I en skola har var och en av de 20 klasserna ett studieråd med 5 ledamöter vardera. Per är den ende av pojkarna som får samsas med fyra flickor i sitt råd. Han noterar att det är kvinnlig majoritet i ytterligare 15 av studieråden, trots att det totalt är lika många flickor som pojkar i råden.
Hur fördelar sig antalet pojkar och flickor i de fyra råd som har manlig majoritet?

Lösning: Skolan har 100 studierådsledamöter, 50 flickor och 50 pojkar. I de 16 råden med kvinnlig majoritet har vi exakt ett råd med 4 flickor och en pojke (Pers råd). I övriga 15 råd måste det finnas minst 3 flickor. I de 16 "flickråden" finns det alltså minst $15 \cdot 3 + 4 = 49$ flickor. För att få mer än 49 flickor måste vi ha minst ett råd med 5 flickor, men då får vi minst $14 \cdot 3 + 4 + 5 = 51$ flickor, vilket är omöjligt. Alltså har vi 49 flickor i de 16 råden med kvinnlig majoritet och 1 flicka i de 4 råden med manlig majoritet. Bland de senare är det följaktligen tre råd med enbart pojkar och ett råd med fyra pojkar och en flicka.

Svar: Tre råd med enbart pojkar och ett råd med 4 pojkar och 1 flicka.

Alt. lösning: Antag att de 20 råden fördelar sig på följande sätt:

Sammansättning	Antal
5F/0P	a
4F/1P	b
3F/2P	c
2F/3P	d
1F/4P	e
0F/5P	f

Eftersom sammansättningen $4F/1P$ är unik (Pers råd), är $b = 1$. Vi har 16 råd med kvinnlig majoritet och 4 med manlig, vilket ger

$$a + b + c = 16, \quad \text{och således} \quad a + c = 15, \tag{1}$$

samt

$$d + e + f = 4. \tag{2}$$

Vidare är antalet pojkar lika med antalet flickor, 50 st, varav följer

$$5a + 4b + 3c + 2d + e = 50$$

och

$$b + 2c + 3d + 4e + 5f = 50.$$

Vi subtraherar den andra ekvationen från den första och får

$$5a + 3b + c = d + 3e + 5f.$$

Här utnyttjar vi bivillkoren (1) och (2) och skriver

$$4a + 3b + (a + c) = (d + e + f) + 2e + 4f$$

eller

$$4a + 3 + 15 = 4 + 2e + 4f,$$

vilket förenklas till

$$2a + 7 = e + 2f. \tag{3}$$

Här är a, e och f alla icke-negativa och vi noterar att $e + f \leq 4$ till följd av (2). Eftersom vänsterledet är udda för alla a, måste e vara udda, dvs vi har $e = 1$ eller $e = 3$. Om $e = 1$ så är enda möjligheten att $f = 3$ och $a = 0$. Från tidigare har vi $b = 1$. Pga villkoren är då $c = 15$ och $d = 0$. Från tidigare hade vi $b = 1$. Dessa värden uppfyller villkoren. Om i stället $e = 3$ blir $f \leq 1$, varför högerledet i (3) är högst lika med 5; ekv (3) saknar i detta fall lösning. Den funna lösningen är alltså entydig.

2. Två lika långa, cylindriska ljus är gjorda av var sitt material så att brinntiderna är olika. Det ena brinner upp på 4 timmar och det andra på 5 timmar. Ljusen tänds samtidigt. När skall ljusen tändas om man vill att det ena ljuset skall vara dubbelt så långt som det andra klockan 21.00?

Lösning: Vi kan förutsätta att de båda ljusen har längden 1 längdenhet (l.e.) då de tänds. Antag att det ljus som brinner fortast har längden a l.e. klockan 21.00. Då har det andra längden 2a l.e.
Det första ljusets längd har då minskat med $1 - a$ l.e. Eftersom detta ljus har brinnhastigheten $\frac{1}{4}$ l.e. per timme, har det brunnit i $4(1 - a)$ timmar. På samma sätt får vi att brinntiden för det andra ljuset är $5(1 - 2a)$ timmar. Då brinntiderna är lika, får vi

$$4(1 - a) = 5(1 - 2a),$$

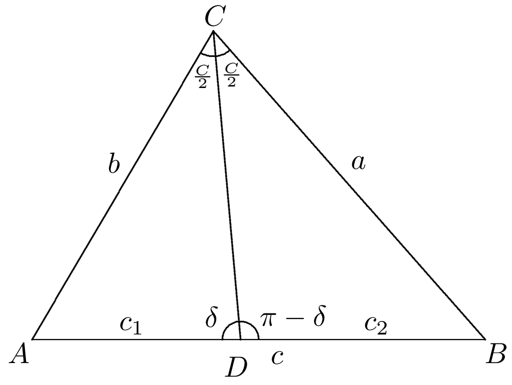
varav $a = \frac{1}{6}$. Ljusen har då brunnit i $4(1 - \frac{1}{6}) = \frac{10}{3}$ timmar, dvs i 3 timmar och 20 minuter, vilket innebär att de skall tändas klockan 17.40.

Svar: Klockan 17.40

3. Sidorna i en triangel har längderna a, b och c. Vinkeln som står mot sidan med längd c är C. Visa att

$$c \geq (a + b) \sin \frac{C}{2} \,.$$

Lösning:



Figur 1

Drag bisektrisen till vinkeln C i triangeln ABC (se figur 1). Den skär sidan AB i punkten D och delar sidan i två delsträckor med längderna $c_1 = |AD|$ och $c_2 = |DB|$, dvs $c = c_1 + c_2$. Inför $\delta = \angle ADC$. Vi tillämpar sinussatsen, dels på triangeln ACD, dels på triangeln BCD och får

$$\frac{c_1}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{b}{\sin\delta}$$

resp

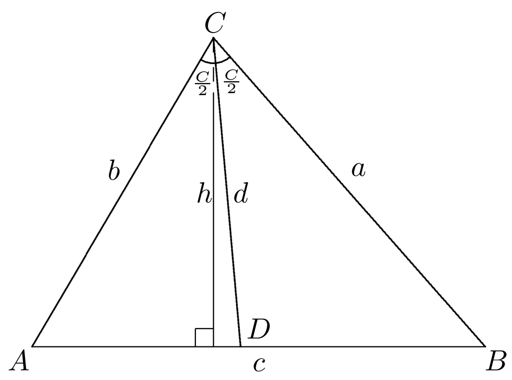
$$\frac{c_2}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{a}{\sin(\pi-\delta)} = \frac{a}{\sin\delta}\,.$$

Vi summerar ekvationerna och finner att

$$\frac{c}{\sin\frac{C}{2}} = \frac{a+b}{\sin\delta} \geq a+b\,,$$

där vi utnyttjar att $\sin\delta \leq 1$, och påståendet följer.

Alt. lösning: Låt sträckan CD ha längden d och låt h vara höjden mot sidan AB (se figur 2).



Figur 2

Vi uttrycker triangelarean T på två sätt, dels som

$$T = \tfrac{1}{2}\,ch\,,$$

dels som summan av areorna av trianglarna ACD och BCD:

$$T = \tfrac{1}{2}\,bd\,\sin\tfrac{C}{2} + \tfrac{1}{2}\,ad\,\sin\tfrac{C}{2} = \tfrac{1}{2}\,(a+b)d\,\sin\tfrac{C}{2}\,.$$

Det gäller alltså att

$$ch = (a+b)d\,\sin\tfrac{C}{2}\,,$$

men eftersom $d \geq h$, följer det att

$$cd \geq (a+b)d\,\sin\tfrac{C}{2}\,,$$

och påståendet följer.

4. Visa att

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\Big) \geq a+b-ab$$

för alla positiva reella tal a och b. När gäller likhet?

Lösning: Eftersom a och b båda är positiva, kan vi dividera olikheten med ab utan att olikheten påverkas. Vi får

$$\frac{1}{2}(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{a^2}) \geq \frac{1}{b}+\frac{1}{a}-1$$

eller

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2} \geq 2\cdot\frac{1}{a}+2\cdot\frac{1}{b}-2.$$

I olikheten förekommer såväl talen $p=\frac{1}{a}$, $q=\frac{1}{b}$ som deras kvadrater $p^2=\frac{1}{a^2}$, $q^2=\frac{1}{b^2}$, och vi kan skriva olikheten på formen

$$p^2+q^2-2p-2q+2 \geq 0\,,$$

där p och q är positiva reella tal. Men här inser vi att vi kan bilda två kvadrater i p och q respektive, genom att skriva

$$(p^2-2p+1)+(q^2-2q+1) \geq 0\,,$$

vilket ju är ekvivalent med

$$(p-1)^2+(q-1)^2 \geq 0\,.$$

Summan av två kvadrater är alltid ≥ 0, så den sista olikheten är giltig. Då alla använda former av olikheten är ekvivalenta, så måste därmed också den ursprungliga olikheten gälla. Påståendet är således visat.

Vi har likhet i den sista olikheten om och endast om $p=q=1$, dvs för $a=b=1$. Om vi följer de olika stegen vid omformningen av olikheten ser vi att detta villkor också gäller den ursprungliga olikheten.
Svar: Likhet gäller om och endast om $a=b=1$.

5. Vilka funktioner $f(x)$ uppfyller likheten

$$x\big(f(x)+f(-x)+2\big)+2f(-x)=0$$

för alla reella tal x?

Lösning: Byte av x mot $-x$ ger

$$-x\big(f(-x)+f(x)+2\big)+2f(x)=0\,,$$

som adderat till den givna likheten ger

$$2f(-x)+2f(x)=0\,,\ \text{dvs}\ \ f(-x)=-f(x)\,.$$

Detta ger i sin tur att

$$x\big(f(x)-f(x)+2\big)-2f(x)=0\,,$$

som förenklas till

$$2x-2f(x)=0\,,\ \text{dvs}\ \ f(x)=x\,.$$

Omvänt, om vi i den ursprungliga likhetens vänsterled sätter in $f(x)=x$, får vi

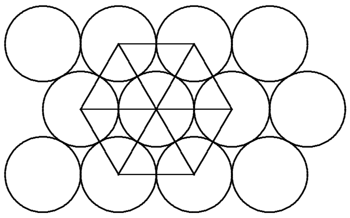
$$x\big(x+(-x)+2\big)+2(-x),$$

som är identiskt lika med 0, dvs $f(x) = x$ uppfyller den givna likheten och lösningen är entydig.

Svar: $f(x) = x$

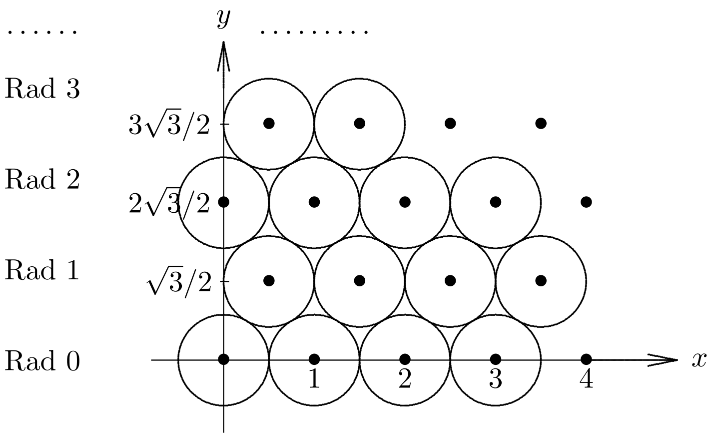
6. I planet packas cirkelskivor, alla med diameter 1, så att varje cirkel tangerar 6 av de andra cirklarna. För varje par av cirkelskivor saknas gemensamma punkter utöver eventuella tangeringspunkter. Finns det två cirkelskivor vars medelpunkter har avstånd $\sqrt{2007}$?

Lösning. Om vi förenar tangerande cirklars medelpunkter med räta linjer, kommer planet att delas in i liksidiga trianglar med sidan 1, där triangelhöjden mot varje sida är $\sqrt{3}/2$ (se figur 3).



Figur 3

Låt oss lägga in ett rätvinkligt koordinatsystem i planet så att punkterna med koordinater ... $(-3,0)$, $(-2,0)$, $(-1,0)$, $(0,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$, $(3,0)$ ... utgör medelpunkter i cirklar. Övriga cirklars medelpunkter kommer då att hamna i rader, parallella med x-axeln, på sätt som framgår av figur 3. Vi ska studera avstånd mellan två cirklars medelpunkter. Det gör vi genom att fixera den ena cirkeln, lämpligen den med medelpunkten i origo. Av symmetriskäl räcker det att välja den andra cirkeln bland cirklar vilkas medelpunkter har icke-negativa koordinater.



Figur 4

Varje punkt som befinner sig i en rad med *jämnt* radnummer, $r = 2s$, har koordinater på formen $\left(k, 2s\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (k, \sqrt{3}s)$, där k, $s = 0, 1, 2, \ldots$. Det kvadratiska avståndet mellan punkten och origo är, enligt Pythagoras sats, $k^2 + 3s^2$. Vi ska undersöka om det är möjligt att välja heltalen k och s, så att

$$k^2 + 3s^2 = 2007.$$

Eftersom $2007 = 9 \cdot 223$, dvs är delbart med 3 (och 9), måste också k vara delbart med 3 och vi kan skriva $k = 3m$. Vi söker nu lösningar till ekvationen $9m^2 + 3s^2 = 9 \cdot 223$, eller

$$3m^2 + s^2 = 3 \cdot 223.$$

På samma sätt som förut måste s vara delbart med 3, dvs $s = 3t$ säg, och ekvationen övergår efter förenkling i

$$m^2 + 3t^2 = 223,$$

Prövning med $t = 0$ ger $m^2 = 223$, $t = 1$ ger $m^2 = 220$, $t = 2$ ger $m^2 = 211$. I inget av dessa fall är m heltal. Däremot för $t = 3$ får vi $m^2 = 196$ och $m = 14$. Det betyder att $k = 3m = 42$ och $s = 3t = 9$. Punkten med koordinaterna $(42, 9\sqrt{3})$ ligger alltså på avståndet $\sqrt{2007}$ från origo. Vi har därmed visat att det finns två cirklar vilkas medelpunkter ligger på avståndet $\sqrt{2007}$ och vi har således besvarat frågan.

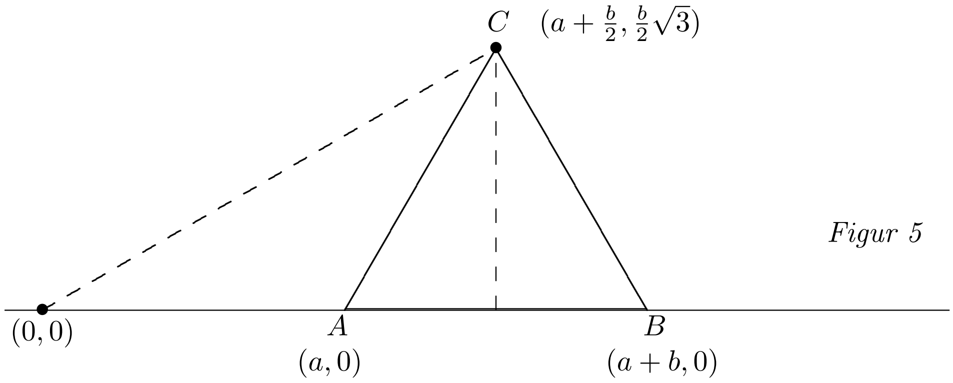
För fullständighetens skull ska vi dock undersöka avstånden till origo för medelpunkterna i övriga cirklar i den första kvadranten. För $t = 4, 5, 6, 7, 8$ får vi m^2-värdena 175, 148, 115, 76 och 31 respektive, men i inget av dessa fall är m ett heltal.

Alternativt kan vi skriva om det kvadratiska avståndet $k^2 + 3s^2$, genom att införa $v = k - s$. Ersätter vi k med $s + v$, övergår uttrycket i $(s+v)^2 + 3s^2 = 4s^2 + 2sv + v^2 = (2s)^2 + (2s)v + v^2$, dvs är på formen $a^2 + ab + b^2$, med $a = 2s$ och $b = v$. Genom prövning kan man visa att det finns två lösningar till ekvationen $a^2 + ab + b^2 = 2007$ i positiva heltal, nämligen $(a, b) = (18, 33)$ och $(a, b) = (33, 18)$. Eftersom b anger differensen mellan k och s skulle b även kunna vara negativ; vi har lösningen $(a, b) = (51, -18)$ (om $(a, b) = (33, 18)$ är en lösning, är också $(a, b) = (33 + 18, -18)$ en lösning). Men i det aktuella fallet är $a = 2s$, ett jämnt, positivt tal, varför den enda möjligheten är $a = 18$ och $b = 33$, varav $s = 9$ och $k = s + v = s + b = 42$, och vi finner än en gång att punkten med koordinaterna $(42, 9\sqrt{3})$ har avståndet $\sqrt{2007}$ till origo.

Varje punkt som befinner sig i en rad med *udda* radnummer, $r = 2s + 1$, har koordinater på formen $\left(k + \frac{1}{2}, (2s + 1)\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, k, $s = 0, 1, 2, \ldots$. Det kvadratiska avståndet mellan punkten och origo är följaktligen $k^2 + k + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}(4s^2 + 4s + 1) = k^2 + k + 3s^2 + 3s + 1$. Vi ska visa att även i detta fall kan det kvadratiska avståndet skrivas på formen $a^2 + ab + b^2$. Insättning av $k = s + v$ ger $(s + v)^2 + (s + v) + 3s^2 + 3s + 1 = 4s^2 + 4s + 1 + 2sv + v + v^2 = (2s + 1)^2 + (2s + 1)v + v^2$, dvs är på formen $a^2 + ab + b^2$, med $a = 2s + 1$ och $b = v$. Vi återvänder till de tre heltalslösningarna i a och b ovan, men då a är udda är bara $(a, b) = (33, 18)$ och $(a, b) = (51, -18)$ aktuella. I det förra fallet finner vi att $s = \frac{a-1}{2} = 16$ och $k = s + v = s + b = 34$, vilket gör att koordinaterna för den aktuella punkten är $(34 + \frac{1}{2}, 33\frac{\sqrt{3}}{2})$. I det senare fallet blir $s = \frac{a-1}{2} = 25$ och $k = s + v = s + b = 7$, vilket ger koordinaterna $(7 + \frac{1}{2}, 51\frac{\sqrt{3}}{2})$. Sammanfattningsvis konstaterar vi att det finns tre cirklar i den första kvadranten vilkas medelpunkter ligger på avståndet $\sqrt{2007}$ från origo. Av symmetriskäl finns det i var och en av de övriga kvadranterna tre cirklar med samma egenskap, dvs det finns totalt tolv stycken.

Svar: Ja, det finns två cirkelskivor vars medelpunkter har avstånd $\sqrt{2007}$?

Anm. Ett alternativt sätt att visa att det kvadratiska avståndet från en godtycklig cirkels medelpunkt kan skrivas på formen $a^2 + ab + b^2$ är följande. Man observerar att en sådan punkt, belägen i den första kvadranten, ligger i hörnet C till en liksidig triangel ABC (se figur 5) med sidan AB längs x-axeln, så att A ligger i punkten $(a, 0)$ och B i punkten $(a+b, 0)$ (längden av triangelsidan är alltså b). Successivt tangerande cirklar ligger nämligen ”på rad” längs sidorna i liksidiga trianglar så placerade (jämför med figurerna 3 och 4). Här är b ett positivt heltal, medan a är ett godtyckligt heltal. Man kan visa att koordinaterna för hörnet C blir $(a + \frac{b}{2}, \frac{b}{2}\sqrt{3})$.



Figur 5

Det kvadratiska avståndet från C till origo blir, enligt Pythagoras sats,

$$\left(a+\tfrac{b}{2}\right)^2+\tfrac{3b^2}{4}=a^2+ab+b^2.$$

Enda heltalspar (a, b) som vi behöver beakta är $(18, 33)$, $(33, 18)$ och $(-18, 51)$. Se för övrigt tidigare gjorda resonemang.