SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 30 september 2008

Förslag till lösningar

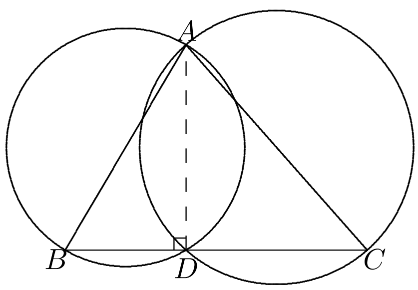
Problem 1. Tre rader med tal är skrivna på ett papper. Varje rad innehåller tre olika positiva heltal. För varje rad bildas summan och produkten av de tre talen. Talen är sådana att de tre radsummorna är lika, medan de tre produkterna är olika; produkten är minst för den första raden och störst för den tredje. Om det är givet att radsumman är den minsta möjliga som kan fås under villkoren ovan, bestäm denna summa och ange för varje rad de tre tal som ingår.

Lösning: Eftersom radsummorna är lika medan produkterna skiljer sig åt kan två rader ha högst ett tal gemensamt. Vi söker alltså tre olika taltripplar som är sådana att två tripplar kan ha högst ett tal gemensamt och där summan av talen, som ska vara densamma i varje trippel, är så liten som möjligt. Vi noterar att ordningen mellan talen inte spelar någon roll, det enda som har betydelse är vilka tal som ingår. Låt oss beteckna den gemensamma summan med S. För $S = 6$ finns bara trippeln $\{1, 2, 3\}$, för $S = 7$ finns bara $\{1, 2, 4\}$ medan det för $S = 8$ finns två olika tripplar, $\{1, 2, 5\}$ och $\{1, 3, 4\}$. För $S = 9$ däremot finns det tre olika tripplar: $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 3, 5\}$ och $\{2, 3, 4\}$. Villkoren är uppfyllda: produkterna är resp 12, 15, och 24, dvs tripplarna anger i den ordning de står talen i raderna 1, 2 och 3.

Svar: Den minsta möjliga summan är 9 och talen i raderna 1, 2 och 3 är resp $\{1, 2, 6\}$, $\{1, 3, 5\}$ och $\{2, 3, 4\}$.

Problem 2. Givet är en spetsvinklig triangel. Två cirklar ritas med två av triangelns sidor som diametrar. Visa att en av cirklarnas skärningspunkter ligger på triangelns tredje sida.

Lösning: Låt triangeln ha hörn i punkterna A, B och C som figuren visar. Vi bildar två cirklar med AB resp AC som diametrar. Den första cirkeln skär sidan BC, eller dess förlängning, i punkten B och i ytterligare en punkt, D, som är skild från B, eftersom vinkeln vid B inte är rät. Enligt randvinkelsatsen är vinkeln ADB rät, eftersom denna står på cirkeldiametern AB. Det betyder att punkten D utgör fotpunkten för höjden i triangeln ABC genom hörnet A mot sidan BC. Då triangeln är spetsvinklig måste höjdens fotpunkt ligga mellan B och C, dvs på triangelsidan. Med samma argument finner vi att den andra cirkeln, som har AC som diameter, också skär sidan BC i punkten D. Men detta innebär att de båda cirklarna skär varandra i punkten D (de skär dessutom varandra i punkten A). Cirklarna har alltså en skärningspunkt på sidan BC och påståendet är visat.



Problem 3. Bestäm alla positiva heltal $a \leq b \leq c$ sådana att $a^3 + b^3 + c^3 = 2008$.

Låt oss börja med att lista n jämte dess kub n^3 för $n = 1, 2, \ldots$. Eftersom $12^3 = 1728 < 2008$ och $13^3 > 2008$ räcker det att studera n-värden som är mindre än eller lika med 12.

n	n^3	rest vid div. med 8
1	1	1
2	8	0
3	27	3
4	64	0
5	125	5
6	216	0
7	343	7
8	512	0
9	729	1
10	1000	0
11	1331	3
12	1728	0

Eftersom 2008 är ett jämnt tal, har vi två möjligheter: antingen är a, b och c alla jämna, eller så är två av talen udda och det tredje jämnt.

Fall 1. Talen a, b, c är jämna. Låt oss sätta $a = 2r$, $b = 2s$, $t = 2s$. Vi söker nu alla positiva heltal $r \leq s \leq t$, som är sådana att $(8r)^3 + (8s)^3 + (8t)^3 = 2008$, dvs sådana att

$$r^3 + s^3 + t^3 = 251\,.$$

Ingen av talens kuber kan överstiga 251. Vidare måste den största av de tre talens kuber måste vara minst så stort som 251/3. Enligt tabellen är den största tredjepotensen, t^3, antingen 125 eller 216.

Om $t^3 = 125$ måste $r^3 + s^3 = 251 - 125 = 126$. Från tabellen ser vi att denna summa bara kan fås på ett sätt, nämligen som $125 + 1$. Vi får alltså $1 + 125 + 125 = 251$, varav $r = 1$, $s = t = 5$, vilket efter multiplikation med 2 ger $a = 2$, $b = 10$, $c = 10$ och kubsumman $8 + 1000 + 1000 = 2008$.

Om $t^3 = 216$, måste $r^3 + s^3 = 251 - 216 = 35$. Vi finner snart att 27 och 8 är de enda kuberna som ger summan 35. Vi får $r = 2$, $s = 3$ och $t = 6$, vilket efter multiplikation med 2 ger $a = 4$, $b = 6$ och $c = 12$ och kubsumman $64 + 216 + 1728 = 2008$.

Vi har därmed hittat alla lösningar i jämna heltal a, b och c.

Fall 2. Två av talen är udda och det tredje är jämnt. Låt oss bortse från villkoret $a \leq b \leq c$ och enbart anta att a, b och c är positiva heltal. Antag vidare att a och b är udda tal och att c är jämnt. I likheten $a^3 + b^3 + c^3 = 2008$ är 2008 delbart med 8 och detsamma gäller enligt antagandet c^3, varför $a^3 + b^3$ också måste vara delbart med 8. Sökandet kan förenklas något genom att vi för varje kubiskt tal bestämmer resten när talet divideras med 8. Alla jämna tal är ju delbara med 8, dvs ger resten är 0, medan de udda har någon av resterna 1,3, 5 eller 7 (se tabellen ovan). För att summan av de udda kuberna ska vara delbar med 8, krävs att summan av resterna också är det. Här räcker det i själva verket att restsumman är lika med 8. Det finns fyra sådana fall; summorna blir $1 + 343 = 344$, $27 + 125 = 152$, $125 + 1331 = 1456$, $343 + 729 = 1072$. Det återstår att undersöka om det tal som återstår för att ge summan 2008 är en kub i något av dess fyra fall. Eftersom c^3 ska vara delbart med 8 räcker det att utföra prövningen efter division med detta värde. Vi får differenserna $2008 - 344 = 1664$, $2008 - 152 = 1856$, $2008 - 1456 = 552$ och $2008 - 1072 = 936$. Efter division med 8 får vi talen 208, 232, 69 och 117, men inget av dessa tal är kuben på något heltal. I fall 2 går det alltså inte att hitta tre kuber med summan 2008.

Alternativ lösning: Den största av de tre kuberna, c^3, måste vara minst 2008/3, vilket är uppfyllt för c-värdena 9, 10, 11, 12 med motsvarande kuber 729, 1000, 1331, 1728. För att totalsumman ska bli 2008 måste summan av de två återstående kuberna vara resp 1279, 1008, 677, 280. Eftersom b^3 är störst av de sistnämnda, måste värdet vara minst lika med hälften av den återstående summan. Dessutom är b^3 högst lika med c^3 och mindre än den återstående summan (den sista kuben, a^3, är minst lika med 1). Vi hänvisar till tabellen ovan.
Fall 1. Med $c = 9$ och $c^3 = 729$ gäller att $1279/2 < b^3 \leq 729$. Enda möjlighet är $b^3 = 729$, men $2008 - 729 - 729 = 550$ är inte en heltalskub.
Fall 2. Med $c = 10$ och $c^3 = 1000$ gäller att $1008/2 \leq b^3 \leq 1000$. Prövning med kubtalen 512, 729 och 1000 visar att bara det sistnämnda fungerar: $b^3 = 1000$ och $a^3 = 8$, dvs $b = 10$, $a = 2$ och lösningen $(a, b, c) = (2, 10, 10)$.
Fall 3. Med $c = 11$ och $c^3 = 1331$ gäller att $677/2 < b^3 < 677$, dvs $b^3 = 343$ och $b^3 = 512$ är enda möjligheter, men varken $2008 - 1331 - 343 = 334$ eller $2008 - 1331 - 512 = 165$ är någon heltalskub.
Fall 4. Med $c = 12$ och $c^3 = 1728$ gäller att $280/2 \leq b^3 < 280$. Då har vi $b^3 = 216$, vilket ger $a^3 = 64$, dvs $b = 6$, $a = 4$ och lösningen $(a, b, c) = (4, 6, 12)$.

Svar: $(a, b, c) = (2, 10, 10)$ och $(4, 6, 12)$

Problem 4. Finn alla icke-negativa lösningar till ekvationssystemet

$$\begin{cases} x^2 - yz = x \\ y^2 - zx = y \\ z^2 - xy = z \end{cases}.$$

Lösning: Bilda differensen mellan ekv 1 och ekv 2 samt mellan ekv 2 och ekv 3. Vi får ekvationerna

$$\begin{cases} (x^2 - y^2) + (xz - yz) = x - y \\ (y^2 - z^2) + (xy - xz) = y - z\,, \end{cases}$$

som kan omformas till

$$\begin{cases} (x - y)(x + y + z - 1) = 0 \\ (y - z)(x + y + z - 1) = 0\,. \end{cases}$$

En lösning till systemet måste uppfylla $x = y = z$ och/eller $x + y + z = 1$ (om minst en av differenserna $x - y$ och $y - z$ är skild från 0, måste $x + y + z = 1$).
Fallet $x = y = z$. Insättning i ursprungsekvationerna ger $x = y = z = 0$, vilket således är en lösning till ekvationssystemet.
Fallet $x + y + z = 1$. Summering av de tre ursprungsekvationerna ger

(1) $$(x^2 + y^2 + z^2) - (xy + yz + zx) = x + y + z\,.$$

Vi har också utvecklingen

(2) $$(x + y + z)^2 = (x^2 + y^2 + z^2) + 2(xy + yz + zx)\,.$$

Summering av ekvationerna (1) och (2) ger

$$3(xy + yz + zx) = (x + y + z)^2 - (x + y + z) = 0\,.$$

Det betyder att $xy = yz = zx = 0$, eftersom xy, yz och zx antogs vara icke-negativa. Om det ursprungliga ekvationssystemet skrivs på formen

$$\begin{cases} x(x - 1) = yz \\ y(y - 1) = zx \\ z(z - 1) = xy \end{cases},$$

ser vi direkt att enda möjliga värden på x, y, z är 0 eller 1. Men då summan av talen är 1, återstår endast möjligheterna $(x, y, z) = (1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ och $(0, 0, 1)$. Kontroll visar att dessa är lösningar till ekvationssystemet.

Svar: $(x, y, z) = (0, 0, 0)$, (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)

Problem 5. Visa att

$$xy + 2x^2y^2 \leq x^2 + y^2 + xy^3$$

för alla $0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1$.

Lösning: Vi samlar alla termer i högerledet och visar att det så erhållna uttrycket är ≥ 0 för alla x och y i definitionsmängden. För överskådlighets skull parar vi ihop termerna två och två. Faktorn $y - x$ dyker upp i vissa deluttryck, varför det blir naturligt att dela upp problemet i två fall: $0 \leq y \leq x \leq 1$ och $0 \leq x < y \leq 1$.

Fall 1. $0 \leq x \leq y \leq 1$. Vi skriver olikheten som $xy + x^2y^2 + x^2y^2 \leq y^2 + x^2 + xy^3$ och parar ihop varje term i vänsterledet med motsvarande term i högerledet och får

$$0 \leq (y^2 - xy) + (x^2 - x^2y^2) + (xy^3 - x^2y^2)$$

eller

$$0 \leq y(y - x) + x^2(1 - y^2) + xy^2(y - x)$$

Varje term i det sista ledet är under de givna villkoren ≥ 0, dvs vi har visat att olikheten gäller i det första fallet.

Fall 2. $0 \leq y < x \leq 1$. I detta fall använder vi i princip olikheten i dess ursprungliga form, $xy + x^2y^2 + x^2y^2 \leq x^2 + y^2 + xy^3$, och parar ihop termerna i de bägge leden på samma sätt som tidigare:

$$0 \leq (x^2 - xy) + (y^2 - x^2y^2) + (xy^3 - x^2y^2)$$

eller

$$0 \leq x(x - y) + y^2(1 - x^2) + xy^2(y - x)$$

Här kan den sista termen i högerledet bli negativ till skillnad från de två första. Men om vi adderar den första termen till den tredje får vi

$$0 \leq y^2(1 - x^2) + x(1 - y^2)(x - y)\,,$$

där de båda deluttrycken i det sista ledet är ≥ 0. Vi har alltså visat att olikheten gäller också i fall 2 och därmed för alla x och y i den ursprungliga definitionsmängden.

Alternativ lösning: Det går att lösa olikheten direkt utan att göra en uppdelning i olika fall. Vi omformar olikheten på följande sätt:

$$0 \leq (x^2 + y^2 - 2xy) + (xy^3 - 2x^2y^2 + xy)\,.$$

Högerledet kan nu skrivas som

$$(x - y)^2 + xy(y^2 - 2xy + 1).$$

Men eftersom $xy \geq 0$ och $2xy \leq 2y$, är högerledet större än eller lika med

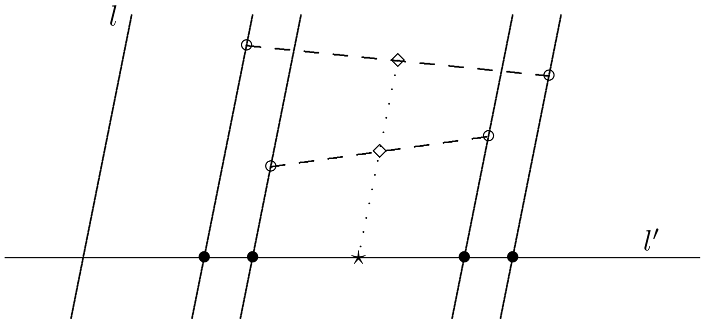
$$(x - y)^2 + xy(y^2 - 2y + 1) = (x - y)^2 + xy(y - 1)^2.$$

Båda termerna i det sista ledet är ≥ 0 för alla x och y i definitionsmängden och olikheten är därmed visad.

Problem 6. Låt $P_1, P_2, \ldots, P_n$ vara n olika punkter i planet. Man markerar med blå färg mittpunkterna på alla möjliga sträckor mellan skilda punkter, dvs P_iP_j, $1 \leq i < j \leq n$. Vilket är det minsta möjliga antalet olika blå punkter?

Lösning: Låt l vara en linje som inte är parallell med någon av sträckorna P_iP_j. En sådan linje måste finnas, eftersom det endast finns ett ändligt antal sträckor. Genom varje punkt P_i drar vi en linje, l_i, parallell med l. Enligt förutsättningarna är linjerna $l_1, l_2, \ldots, l_n$ alla skilda åt.

Låt nu l' vara en linje som inte är parallell med l. Den skär linjerna $l_1, l_2, \ldots, l_n$ i punkterna $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, säg. Punkterna $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ utgör s.k. parallellprojektioner (parallellt med l) på l' av punkterna $P_1, P_2, \ldots, P_n$. På varje sträcka Q_iQ_j, $i \neq j$, färgar vi nu mittpunkten gul. De gula punkterna kommer likaså att bilda parallellprojektioner (parallellt med l) på l' av de blå punkterna, eftersom parallellförflyttningen bibehåller alla avståndsförhållanden oförändrade. Det kan dock inträffa att flera blå punkter genom parallellförflyttningen kan ge upphov till samma gula punkt (se figuren nedan, där ofyllda ringar markerar punkterna P_i, fyllda ringar punkterna Q_i, fyrkanter markerar två av de blå punkterna som övergår i en gemensam gul punkt, markerad med en stjärna). Antalet gula punkter måste därför bli högst lika med antalet blå punkter.

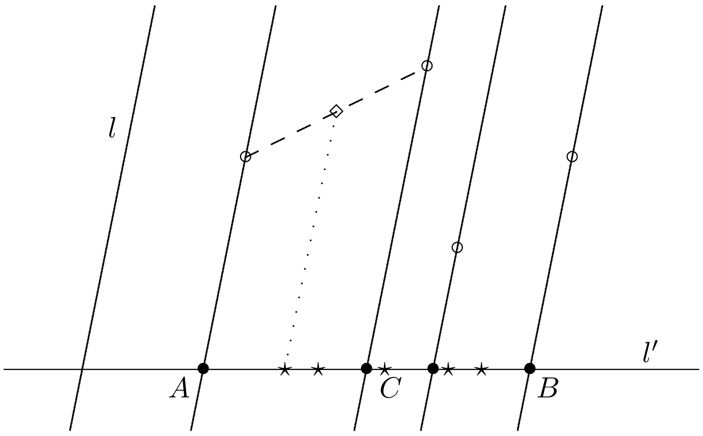


Vilket är det minsta antalet gula punkter som kan förekomma? Låt A och B beteckna de båda ytterpunkterna av punkterna $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$. Mellan A och B på linjen l' ligger alltså de $n-2$ övriga punkterna Q_i. Låt oss beteckna mittpunkten på sträckan AB med C.

1) Betrakta först mittpunkterna på sträckorna AQ_i för de punkter Q_i som ligger mellan A och B (och inte sammanfaller med någon av dessa). Dessa mittpunkter måste hamna i gula punkter på ett avstånd från A som är strikt mindre än halva avståndet mellan A och B. De gula punkterna måste alla vara skilda åt, eftersom punkterna Q_i är skilda åt.

2) Betrakta sedan mittpunkterna på sträckorna BQ_i för nämnda punkter Q_i mellan A och B. Dessa mittpunkter måste hamna i gula punkter på ett avstånd från B som är strikt mindre än halva avståndet mellan A och B. Ånyo konstaterar vi att dessa gula punkter ligger skilda åt och dessutom är skilda från den första uppsättningen punkter, eftersom uppsättningarna ligger på var sin hälft av sträckan AB.

3) Slutligen konstaterar vi att mittpunkten C på sträckan AB också hamnar i en gul punkt, skild från övriga mittpunkter bildade under 1) och 2).



Figuren illustrerar fallet $n = 4$. Punkterna P_i är markerade med ofyllda ringar och punkterna Q_i med fyllda. Stjärnorna på linjen l' markerar de enligt 1), 2) och 3) garanterat olika gula punkterna. En blå punkt (mittpunkten på det streckade linjestycket) är markerad med en fyrkant och övergår genom parallellförflyttningen i en gul punkt.

Sammanfattningsvis gäller att det måste finnas *minst* $(n-2)+(n-2)+1 = 2n-3$ olika gula punkter och således minst lika många olika blå punkter. Frågan är om det finns en placering av punkterna $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ som är sådan att antalet gula punkter är exakt $2n-3$. Jo, en sådan finns. Om vi nämligen placerar punkterna Q_i på lika avstånd, exempelvis med koordinaterna $(1,0)$, $(2,0)$, …, $(n,0)$ och bildar de mittpunkter som beskrivs under 1), 2) och 3), finner vi att punkterna med koordinaterna $(2,0)$, $(3,0)$, …, $(n-1,0)$, samt $(\frac{1}{2},0)$, $(1+\frac{1}{2},0)$, $(2+\frac{1}{2},0)$, …, $((n-1)+\frac{1}{2},0)$ alla färgas gula. Antalet sådana punkter är $(n-2)+(n-1) = 2n-3$. Några andra gula punkter finns inte i detta fall. Om vi från början låter punkterna P_i ha koordinaterna $(1,0)$, $(2,0)$, …, $(n,0)$, blir följaktligen antalet blå punkter lika med $2n-3$.

Svar: Minsta antalet blå punkter är $2n-3$