SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 29 september 2009

Förslag till lösningar

Problem 1. Visa att talet 2009 kan skrivas som summan av 17 positiva heltal som endast innehåller siffran 7 och ange alla sådana framställningar. Två framställningar som skiljer sig enbart beträffande termernas ordning räknas bara en gång.

Lösning. Enda möjliga termer är 7, 77 och 777. Av de 17 termerna antar vi att a stycken är 777, b är 77 och c är 7, där alltså $a+b+c=17$. Detta ger

$$777a+77b+7(17-a-b)=2009$$

$$\Leftrightarrow$$

$$111a+11b+(17-a-b)=287,$$

$$\Leftrightarrow$$

$$110a+10b=270,$$

$$\Leftrightarrow$$

$$11a+b=27.$$

För $a=0$ blir $b=27>17$, går inte. För $a=1$ blir $b=16$ och $c=0$. För $a=2$ blir $b=5$ och $c=10$. För $a>2$ är b negativt, går inte.

Svar. Två lösningar: 1 term är 777 och 16 termer är 77 ;
2 termer är 777, 5 termer är 77 och 10 termer är 7 .

Problem 2. Tre bilar körs var sin sträcka. Sträckornas längder utgör en aritmetisk talföljd. Man noterar att detsamma gäller även för tiderna och medelhastigheterna (i samma ordning). Visa att antingen tiderna eller medelhastigheterna är lika.
Anm. Talen a, b och c bildar en aritmetisk talföljd om $b-a=c-b$.

Lösning. Låt tiderna och medelhastigheterna, tagna i samma ordning, vara

$$t-r,\ t\,,t+r$$

resp.

$$v-s,\ v,\ v+s\,.$$

Sträckorna blir då

$$(t-r)(v-s),\ tv,\ (t+r)(v+s)$$

eller

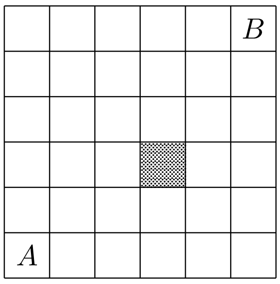
$$tv-(ts+vr-rs),\ tv,\ tv+(ts+vr+rs)\,.$$

Dessa tre tal bildar en aritmetisk serie om och endast om successiva differenser är lika, dvs om och endast om

$$ts+vr-rs=ts+vr+rs,$$

vilket endast gäller om $rs = 0$, dvs om $r = 0$ eller $s = 0$. I det första fallet är alla tider lika; i det andra är alla medelhastigheter lika. (Om både r och s är lika med 0 blir trivialt alla sträckor lika.)

Problem 3. En pjäs befinner sig i rutan A och ska flyttas till rutan B i nedanstående figur. Hur många olika vägar finns det om pjäsen endast får röra sig i riktningarna höger och uppåt och dessutom inte får passera igenom den skuggade rutan?



Figur 1.

Lösning: Låt oss beteckna den skuggade rutan med C. Vi betraktar först fallet när det är tillåtet att också passera igenom rutan C (se figur 3). Låt oss markera varje ruta med antalet vägar från A som leder fram till rutan. Alla rutor i den nedersta raden och i kolumnen längst till vänster kan bara nås på ett sätt och markeras med 1:or. Sedan använder vi regeln att antalet vägar till en ruta R är lika med summan av antalet vägar till de båda rutor som ligger omedelbart till vänster om resp under R (se t.ex. markerade rutor i figuren där $1 + 1 = 2$ och $15 + 20 = 35$). Vi noterar att talen i rutmönstret utgör en stympad version av Pascals triangel med start i ruta A. I diagonalerna i riktning $NV - SO$ hittar vi i tur och ordning talen 1-1 (diagonal nr 1), 1-2-1 (nr 2), 1-3-3-1(nr 3) osv fram till diagonalen med talen 1-5-10-10-5-1 (diagonal nr 5). I nästa diagonal, 6-15-20-15-6 har vi tappat inledande och avslutande 1:or från Pascals triangel, men nämnda additionsregel gäller likväl och vi finner att antalet vägar från A till B är 252.

Betrakta nu fallet då det inte är tillåtet att passera igenom rutan C (se figur 2). Vi kan fortfarande använda samma metod, men får nu sätta talet 0 i C-rutan, eftersom ingen väg leder dit. Antalet vägar nu blir 152.

						B
6	1	6	21	46	86	152
5	1	5	15	25	40	66
4	1	4	10	10	15	26
3	1	3	6	C **0**	5	11
2	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
A	1	2	3	4	5	6

Figur 2.

1	6	21	56	126	252
1	5	**15**	**35**	70	126
1	4	10	**20**	35	56
1	3	6	C 10	15	21
1	**2**	3	4	5	6
1	**1**	1	1	1	1

Figur 3.

Vi kan också använda oss av följande lösningsvariant. Det är inte nödvändigt att fylla hela rutnätet i figur 2 för att komma fram till lösningen. Det räcker nämligen att bestämma antalet vägar till var och en av rutorna i diagonal nr 5 (se figur 2). Dessa rutor är markerade med D, E, F, G, H i figur 4 (antalet vägar till rutan C är ju 0).

D					B
	E				
		F			
			C		
				G	
A					H

Figur 4.

För att komma från A till B måste vi passera genom någon av rutorna D, E, F, G eller H. Det räcker att bestämma antalet vägar från A till resp D, E och F. Enligt figur 2 finns det 1 väg till D, 5 vägar till E och 10 vägar till F. Men av symmetriskäl måste det då finnas 1 väg från D till B, 5 vägar från E till B och 10 vägar från F till B. Följaktligen finns det 1 väg från A till B som passerar genom rutan D, $5^2 = 25$ vägar genom E och $10^2 = 100$ vägar genom F. Antalet vägar genom G måste vara detsamma som genom E, dvs 25 och antalet vägar genom H måste vara lika med 1. Totala antalet vägar från A till B är alltså $1 + 15 + 100 + 25 + 1 = 152$.

Vi kan också resonera på följande sätt. Antalet vägar från A till B med otillåten ruta C är lika med antalet vägar utan restriktioner, dvs 252, minskat med antalet vägar från A till B som passerar genom C. Vi ska visa att det senare antalet är 100.

För att komma från A till B måste vi ta fem steg åt höger och fem steg uppåt. Antalet vägar från A till B utan restriktioner är lika med antalet olika sätt att blanda $h = 5$ högersteg med $u = 5$ uppåtsteg. Detta kan ske på $\binom{h+u}{h} = \binom{10}{5} = 252$ olika sätt. Denna *binomialkoefficient* är det 5:e elementet i diagonal nr 10 i Pascals triangel (vi har formeln $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, där $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1)$.

För att komma från A till C måste vi flytta pjäsen 3 steg i högerled och 2 steg uppåt, dvs antalet vägar från A till C är $\binom{3+2}{3} = \binom{5}{3} = 10$ (talet i ruta C i figur 3). Antalet vägar från ruta C till ruta B är med motsvarande resonemang lika med $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$, dvs antalet vägar från A till B och som passerar genom C är $10 \cdot 10 = 100$. Antalet vägar från A till B där vi undviker C är alltså $252 - 100 = 152$.

Svar. Antalet vägar är 152.

Problem 4. Bestäm alla positiva heltalslösningar till ekvationen

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{101}\,.$$

Lösning. Då $x, y > 0$ kan ekvationen ekvivalent skrivas som

$$101x + 101y = xy.$$

Vi adderar 101^2 till vardera ledet och formar om ekvationen till

$$xy - 101x - 101y + 101^2 = 101^2 \quad \text{eller} \quad (x-101)(y-101) = 101^2.$$

Eftersom 101 är ett primtal, har vi tre möjliga fall:

1) $x - 101 = 101^2$, $y - 101 = 1$, som ger $x = 10\,302$, $y = 102$;
2) $x - 101 = 1$, $y - 101 = 101^2$, som ger $x = 102$, $y = 10\,302$;
3) $x - 101 = 101$, $y - 101 = 101$, som ger $x = 202$, $y = 202$.

Alternativt kan vi resonera på följande sätt. Låt ekvationen vara skriven på formen

$$xy = 101(x + y).$$

Eftersom 101 är ett primtal måste antingen x eller y innehålla faktorn 101. Låt $x = 101k$, där k är ett heltal ≥ 2 (x och y måste båda vara > 101). Vi får

$$101ky = 101(101k + y),$$

som kan skrivas som

$$y = \frac{101k}{k-1} = 101(1 - \frac{1}{k-1}) = 101 - \frac{101}{k-1}.$$

För att y ska vara ett heltal, måste $k - 1$ vara en delare till 101, men då 101 är en primtal har vi bara $k - 1 = 1$ och $k - 1 = 101$. I det första fallet får vi $k = 2$, $x = 202$ och $y = 202$, i det andra får vi $k = 102$, $x = 10302$ och $y = 102$. Om vi i stället låter y innehålla faktorn 101 får vi samma lösningar men så att x och y har bytt plats. Då tillkommer lösningen (x, y) =(102, 10 302).

Svar: $(x, y) = (10\,302,\ 102),\ (102,\ 10\,302)$ och $(202,\ 202)$.

Problem 5. Bestäm de reella tal $x \geq 0$ som uppfyller

$$\lfloor x\lceil x\rceil\rfloor = \lceil x\lfloor x\rfloor\rceil\,.$$

För ett godtyckligt reellt tal a betecknar $\lfloor a\rfloor$ det största heltal som är mindre än eller lika med a och $\lceil a\rceil$ betecknar det minsta heltal som är större än eller lika med a.

Lösning. För varje heltal $x \geq 0$ är såväl vänsterledet som högerledet lika med x^2 och likhet gäller.
Antag att x inte är ett heltal. Då är

$$\begin{aligned} VL &> x\lceil x\rceil - 1,\\ HL &< x\lfloor x\rfloor + 1, \end{aligned}$$

dvs för varje lösning x till ekvationen gäller

$$x\lceil x\rceil - 1 < x\lfloor x\rfloor + 1 \quad \Leftrightarrow \quad x(\lceil x\rceil - \lfloor x\rfloor) < 2,$$

varav $x < 2$, eftersom $\lceil x\rceil - \lfloor x\rfloor = 1$.
Fall 1. För $0 < x < 1$ är

$$\begin{aligned} VL &= \lfloor x\cdot 1\rfloor = 0,\\ HL &= \lceil x\cdot 0\rceil = 0 \end{aligned}$$

och ekvationen är uppfylld.
Fall 2. För $1 < x < 2$ är

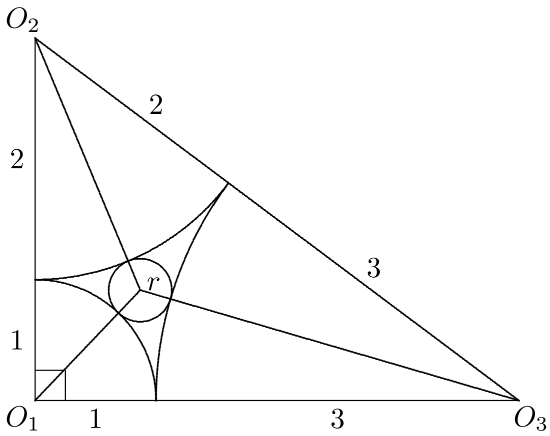
$$\begin{aligned} VL = \lfloor x\cdot 2\rfloor &= 2 \text{ om } \quad 1 < x < \tfrac{3}{2},\\ &= 3 \text{ om } \quad \tfrac{3}{2} \leq x < 2,\\ HL = \lceil x\cdot 1\rceil &= 2, \end{aligned}$$

vilket betyder att vi har likhet om $1 < x < \frac{3}{2}$.

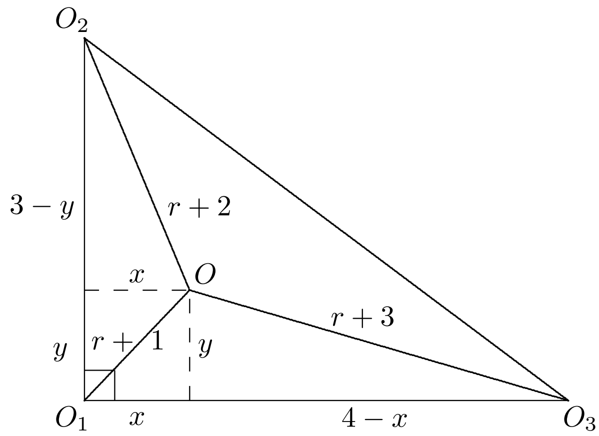
Svar: Ekvationen är uppfylld för varje heltal $x \geq 0$ samt för $0 < x < 1$ och $1 < x < \frac{3}{2}$.

Problem 6. Tre cylindriska stålbehållare med radier 1, 2 och 3 dm står packade tätt intill varandra. Hur stor radie kan en cylindrisk termometerstav ha för att man ska kunna sticka in den mellan de tre behållarna?

Lösning. Välj en termometerstav med maximal radie. Ett horisontellt tvärsnitt kommer då att se ut som tre cirklar med radier 1, 2 resp. 3 dm som tangerar varandra externt, samt en fjärde cirkel som tangerar alla tre och ligger inuti den triangel som bildas när vi förenar de senares medelpunkter. Låt r_1, r_2, r_3, r_4 vara de fyra cirklarnas radier; vi har då $r_1 = 1$, $r_2 = 2$, $r_3 = 3$ och vill bestämma r. Om O_1, O_2, O_3, O är cirklarnas medelpunkter, så bildar O_1, O_2, O_3 en triangel med sidlängder $|O_1O_2| = 3$, $|O_2O_3| = 5$, $|O_3O_1| = 4$, som därmed är rätvinklig med rät vinkel vid O_1. Punkten O ligger inuti triangeln och $|OO_1| = r + 1$, $|OO_2| = r + 2$, $|OO_3| = r + 3$. Kalla avstånden från O till O_1O_2 och O_1O_3 för x respektive y. Vid hörnet O_1 bildas då en rektangel med sidor x och y och diagonal $r + 1$ (se figurerna nedan).



Figur 5.



Figur 6.

Pythagoras sats ger

$$x^2 = (r + 1)^2 - y^2 = (r + 2)^2 - (3 - y)^2,$$

så att

$$y = 1 - \tfrac{r}{3} \text{ och } x^2 = (r + 1)^2 - (1 - \tfrac{r}{3})^2 = \tfrac{8}{9}r^2 + \tfrac{8}{3}r.$$

På samma sätt fås

$$y^2 = (r + 1)^2 - x^2 = (r + 3)^2 - (4 - x)^2,$$

vilket ger

$$x = 1 - \tfrac{r}{2} \text{ och } x^2 = 1 - r + \tfrac{r^2}{4}.$$

Ur de båda uttrycken för x^2 får vi andragradsekvationen $23r^2 + 132r - 36 = 0$. Dess enda positiva lösning ges av

$$\tfrac{-66+\sqrt{5184}}{23} = \tfrac{-66+72}{23} = \tfrac{6}{23},$$

vilket därmed är den maximala radien för termometerstaven.

En alternativ lösning är baserad på en formel som Descartes kort berörde i ett brev till prinsessan Elisabeth av Böhmen 1643. Låt oss definiera krökningen hos en cirkel med radie r som $k = 1/r$. Om vi har fyra cirklar placerade som i uppgiften med radier r_1, r_2, r_3, r och krökningar k_1, k_2, k_3, k resp., gäller enligt Descartes sambandet

$$(k + k_1 + k_2 + k_3)^2 = 2(k^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2).$$

Om radierna r_1, r_2, r_3 för tre av cirklarna är kända och deras krökningar, k_1, k_2, k_3, därmed också är kända, kan vi lösa ut k som en funktion av de övriga genom

$$k = (k_1 + k_2 + k_3) \pm 2\sqrt{k_1k_2 + k_2k_3 + k_3k_1}.$$

I vissa fall kan det finnas två möjliga lägen för de fyra cirklarna och två möjliga positiva värden på k. Med $k_1 = 1$, $k_2 = 1/2$, $k_3 = 1/3$ blir läget av den fjärde cirkeln och värdet på k entydigt bestämt och vi får

$$k = (1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3}) + 2\sqrt{\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{3}}$$

eller

$$k = \tfrac{11}{6} + 2 = \tfrac{23}{6}, \quad \text{vilket ger cirkelradien} \quad r = \tfrac{6}{23}\,.$$

Observera att om vi använder minustecken i formeln får vi ett negativt värde på krökningen, vilket motsvarar ett negativt värde på radien. Detta ska tolkas som att de givna cirklarna ligger inuti den fjärde cirkeln och tangerar denna invändigt.

Svar: Maximala radien är $\frac{6}{23}$.

Anm. Mera om Descartes problem står att läsa i Dan Pedoe: Geometry; A Comprehensive Course (Dover, 1988). Nämnas kan att problemet också är omnämnt i japanska böcker om s.k. tempelgeometri. Under större delen av Edo-perioden, 1603-1867, var Japan mer eller mindre isolerat från omvärlden. Från denna period härrör sig ett antal problem och satser som presenterades på trätavlor (jap.: *sangaku*) som hängdes upp i templen. Syftet med detta är inte helt känt. Tyvärr finns inte den tavla som beskriver det aktuella problemet bevarad till eftervärlden, men man vet att problemet studerades i Japan under slutet av 1700-talet. Däremot kan man läsa om detta och liknande problem i en bok utgiven vid Charles Babbage Research Centre i Winnipeg, Canada, 1989, med titeln *Japanese Temple Geometry Problems*. Boken är författad av Hidetosi Fukagawa i samarbete med Dan Pedoe och kan beställas via bokbutiker på nätet.