SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

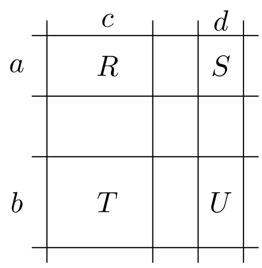
Kvalificeringstävling den 28 september 2010

Förslag till lösningar

Problem 1. En rektangel består av nio smårektanglar med areor (i m^2) enligt figur. Bestäm arean av rektangeln som markerats med ett frågetecken i figuren.

	1	2
3		?
4	5	

Lösning. Om vi har har fyra rektanglar med sidor a, b, c, d (i m) enligt figur 1 blir areorna $R = ac$, $S = ad$, $T = bc$, $U = bd$ (i m^2) och det gäller att R förhåller sig till S som T till U. Vi har nämligen att $\frac{S}{R} = \frac{U}{T} = \frac{d}{c}$ (eller $RU = ST$).



I uppgiften låter vi nu x beteckna arean av rektangeln längst till höger i den andra raden och y arean av motsvarande rektangel i den tredje raden. Vi söker värdet på x.

	1	2
3		x
4	5	y

Låt oss först bestämma värdet på y. Betrakta kolumnerna 2 och 3 samt raderna 1 och 3. Proportionalitetsegenskapen ger areasambandet

$$\frac{2}{1} = \frac{y}{5}, \quad \text{varav } y = 10\,.$$

Bestäm sedan x genom att studera kolumnerna 1 och 3 samt raderna 2 och 3. Vi har sambandet

$$\tfrac{x}{3} = \tfrac{y}{4}, \quad \text{dvs} \quad \tfrac{x}{3} = \tfrac{10}{4}, \text{ som ger } x = 7,5\,.$$

Svar. Arean är 7,5 m^2 .

Problem 2. På dagen för en släktträff sommaren 2010 fyller Lennart, Lotten och Lisa år. Lennart har räknat ut att produkten av deras åldrar är 6958. En gång tidigare under 2000-talet har släktingarna sammanstrålat samma datum. Då var summan av Lennarts, Lottens och Lisas åldrar lika med 80, men vad var produkten den gången?

Lösning. Låt åldrarna vid träffen 2010 vara $x \le y \le z$ (i hela antal år). Det gäller att $xyz = 6958$. Vi delar upp produkten i primfaktorer och får $6958 = 2 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 71$. Eftersom summan av åldrarna var 80 för högst 10 år sedan, kan summan under 2010 inte överstiga 110 och ingen kan vara äldre än 90 år. Någon i trion är följaktligen 71 år, medan de båda övrigas åldrar är 7 och 14, eftersom fallen 1 och 98 (för hög ålder) resp 2 och 49 (för stor summa) måste uteslutas. Vi har alltså $x = 7$, $y = 14$ och $z = 71$ vilket ger summan 92, dvs för att få summan 80 måste vi gå tillbaka $(92 - 80)/3 = 4$ år i tiden, vilket ger dåvarande åldrar 3, 10 och 67. Produkten av dessa är 2010.

Svar. Produkten är 2010 .

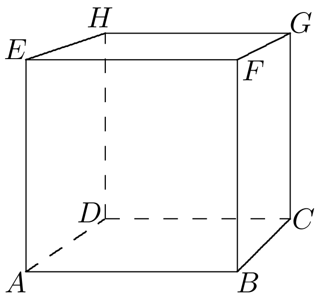
Problem 3. Differensen mellan två femsiffriga heltal är 246. Visa att de tio siffror som ingår i de båda talen inte alla kan vara olika.

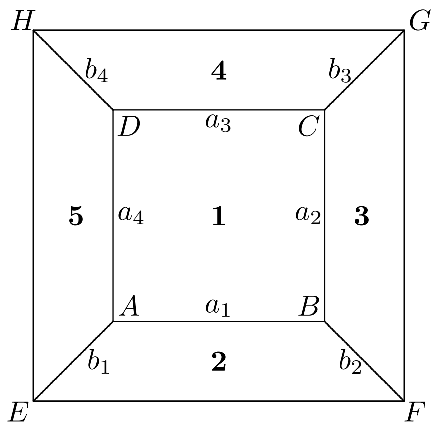
Lösning: Låt oss börja med att bestämma den minsta möjliga differensen mellan två femsiffriga tal bestående av tio olika siffror. För att differensen ska bli mindre än 1000, dvs högst tresiffrig, krävs att de båda talen tillhör angränsande tusental så att de båda förstasiffrorna skiljer sig åt, exempelvis $3abcd - 2efgh$. Dessutom krävs att den andra siffran i det större talet är 0 och att den andra siffran i det mindre talet är 9. Låt oss allmänt skriva differensen som $[k+1]0bcd - k9fgh$, där de ensiffriga talen 0, k, k+1, b, c, d, f, g, h, 9 alla ska vara olika. För att differensen ska bli minimal, måste det tresiffriga talet bcd vara så litet som möjligt och det tresiffriga talet fgh så stort som möjligt. Eftersom siffrorna 0 och 9 är upptagna får vi minimidifferens för $bcd = 123$ och $fgh = 876$. Om vi sätter $k = 4$ får vi två femsiffriga tal med idel olika siffror 50123 och 49876 som ger den minsta möjliga differensen 247. Men det betyder att det inte är möjligt att bilda differensen 246 om vi kräver att alla siffror i de båda talen ska vara olika.

Svar. Nej, det är inte möjligt.

Problem 4. På varje kant i en kub står ett heltal. För fem av kvadraterna gäller att summan av talen på motstående sidor är lika (summorna kan vara olika för olika kvadrater). Visa att detta även gäller för den sjätte kvadraten.

Lösning. Beteckna hörnen med $A, B, \ldots, H$ enligt den vänstra figuren. För överskådlighets skull betraktar vi kuben uppifrån och ser den som en öppen låda (se den högra figuren), där A, B, C, D är hörn i den kvadrat som bildar lådans botten, markerad med **1**. Låt AB, BC, CD, DA tilldelas talen a_1, a_2, a_3, a_4 resp, medan AE, BF, CG, DH tilldelas talen b_1, b_2, b_3, b_4 resp. Vi numrerar de fyra sidokvadraterna med **2**, **3**, **4**, **5** som figuren visar. Vi antar att summavillkoret är uppfyllt för de fem numrerade kvadraterna. Vi ska visa att summavillkoret då också måste vara uppfyllt för kvadraten som bildar lådans topp, dvs för kvadraten $EFGH$.



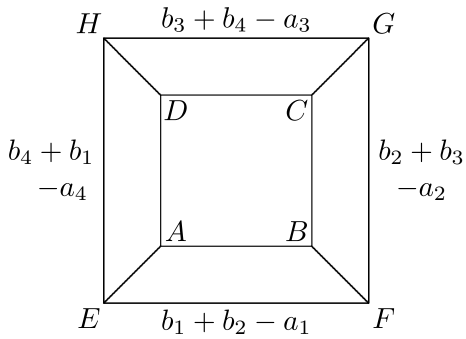


I kvadrat **1** leder summavillkoret till sambandet

(1) $$a_1 + a_3 = a_2 + a_4\,.$$

Villkoret använder vi sedan till att ange uttryck för övriga kanter (kvadratsidor); vi får

$b_1 + b_2 - a_1$ på EF i kvadrat **2**,
$b_2 + b_3 - a_2$ på FG i kvadrat **3**,
$b_3 + b_4 - a_3$ på GH i kvadrat **4**,
$b_4 + b_1 - a_4$ på HE i kvadrat **5**.



Låt oss nu betrakta den sjätte kvadraten, $EFGH$. Summan av motstående sidor är enligt figuren dels

$$(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) - (a_1 + a_3),$$

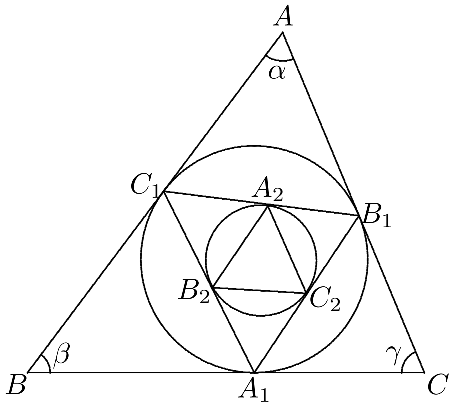
dels

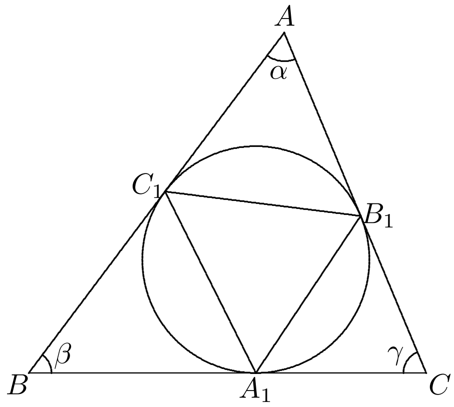
$$(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) - (a_2 + a_4).$$

Men dessa båda summor är lika till följd av sambandet (1) och påståendet är visat.

Problem 5. Den i triangeln ABC inskrivna cirkeln tangerar triangeln i punkterna A_1 på sidan BC, B_1 på sidan AC och C_1 på sidan AB. Den i triangeln $A_1B_1C_1$ inskrivna cirkeln tangerar triangeln $A_1B_1C_1$ i punkterna A_2 på sidan B_1C_1, B_2 på sidan A_1C_1 och C_2 på sidan A_1B_1. Bestäm vinklarna i triangeln $A_2B_2C_2$ då vinklarna vid A, B och C är givna.

Lösning. Beteckna vinklarna vid A, B, C med α, β, γ resp. Låt oss först bestämma vinklarna i triangeln $A_1B_1C_1$ (betrakta den högra figuren).





Triangeln AC_1B_1 är likbent, eftersom tangenterna AC_1 och AB_1 är lika långa. Vardera basvinkeln, vid C_1resp B_1, är således $90° - \frac{\alpha}{2}$. På motsvarande sätt är triangeln BA_1C_1 likbent med varje basvinkel lika med $90° - \frac{\beta}{2}$, medan triangeln CB_1A_1 är likbent med varje basvinkel lika med $90° - \frac{\gamma}{2}$.
Vi kan nu bestämma vinkeln vid A_1 i triangeln $A_1B_1C_1$:

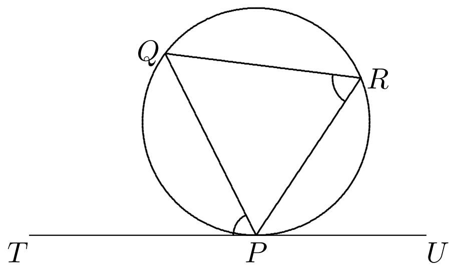
$$\begin{aligned}\angle C_1A_1B_1 &= 180° - \angle BA_1C_1 - \angle B_1A_1C = 180° - (90° - \tfrac{\beta}{2}) - (90° - \tfrac{\gamma}{2}) \\ &= \tfrac{\beta}{2} + \tfrac{\gamma}{2} = 90° - \tfrac{\alpha}{2}\,.\end{aligned}$$

På likartat sätt finner vi att $\angle A_1B_1C_1 = 90° - \frac{\beta}{2}$ och $\angle B_1C_1A_1 = 90° - \frac{\gamma}{2}$.
I nästa steg gäller det att bestämma vinklarna i triangeln $A_2B_2C_2$ när vinklarna i triangeln $A_1B_1C_1$ är givna. Vi observerar att det är exakt samma problem som i första steget, men med skillnaden att ursprungsvinklarna är $90° - \frac{\alpha}{2}$, $90° - \frac{\beta}{2}$ och $90° - \frac{\gamma}{2}$ i stället för α, β och γ. Vinkeln vid A_2 blir därför lika med $90° -$ halva ursprungsvinkeln vid A_1, dvs lika med $90° - \frac{1}{2}(90° - \frac{\alpha}{2}) = 45° + \frac{\alpha}{4}$. Vinklarna vid B_2, C_2 blir enligt samma mönster $45° + \frac{\beta}{4}$, $45° + \frac{\gamma}{4}$ resp.

Svar. Om vinklarna vid A, B, C är α, β, γ resp., blir vinklarna vid A_2, B_2, C_2 resp. $45° + \frac{\alpha}{4}$, $45° + \frac{\beta}{4}$, $45° + \frac{\gamma}{4}$.

⋆ *Anm.* Det är inte en tillfällighet att $\angle AC_1B_1 = \angle C_1A_1B_1$, dvs är lika med $90° - \frac{\alpha}{2}$. Följande allmänna resultat kan visas gälla:

⋆ *Sats.* Vinkeln mellan en tangent och en korda är lika stor som de randvinklar som står på den båge som ligger inuti vinkeln.

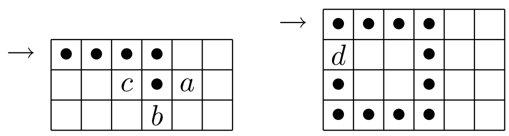


I figuren ligger den kortare cirkelbågen PQ inuti vinkeln TPQ; på denna båge står randvinkeln PRQ. Enligt satsen är $\angle TPQ = \angle QRP$.
⋆ *Bevis.* Om $\angle TPQ = 90°$ är påstående uppenbart, eftersom vinkeln PRQ då står på en halvcirkelbåge och följaktligen är rät. Betrakta fallet $\angle TPQ < 90°$. Drag diametern PS. Om vinkeln $\angle TPQ = \nu$, är $\angle QPS = 90° - \nu$ (eftersom vinkeln

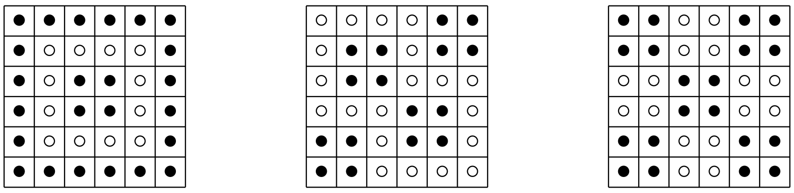
TPS är rät) och vinkeln $QSP = \nu$ (triangeln PQS är rät). Men $\angle QSP = \angle QRP$ (randvinklar på samma båge) och påståendet följer. Fallet $\angle TPQ > 90°$ visas analogt.

Problem 6. Anton har röda och blåa pärlor. Med dem vill han försöka fylla en kvadrat med $n \times n$ piggar (på vilka pärlorna ska sättas) på ett sådant sätt att varje pärla har exakt två ”grannpärlor” med samma färg som pärlan själv. Två pärlor räknas som grannar om de ligger bredvid varandra, antingen i vertikal eller i horisontell ledd. För vilka n är detta möjligt?

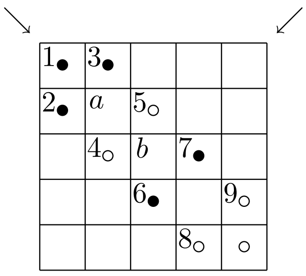
Lösning. Placera ut en pärla i en godtycklig ruta på brädet; vi kan utan inskränkning anta att den är blå. Fortsätt med att placera ut blå pärlor i en sammanhängande kedja så att varje ny pärla är en granne till den närmast föregående. För varje givet n finns det ett ändligt antal möjliga rutor att välja emellan, dvs vi kommer förr eller senare att hamna i en situation där vi inte kan undvika att placera ut en pärla som är granne till någon av de redan utlagda pärlorna. Men varje sådan pärla, utom den först utlagda, har redan två grannar, dvs för att kunna lägga ut ytterligare en pärla krävs att den aktuella pärlan är granne med startpärlan. Vi får då en sammanhängande kedja av rutor fyllda med pärlor i samma färg. Vi kan nu fortsätta på samma sätt med blå pärlor, förutsatt att det finns en ruta vars grannrutor inte innehåller någon blå pärla eller med röda pärlor, för vilka samma regler gäller. Vi fortsätter så tills samtliga rutor är fyllda.
Om vi exempelvis har placerat ut fem pärlor i samma färg med start i rutan vid pilen i den vänstra figuren, kan man antingen placera den sjätte pärlan i rutan a eller i rutan b, men däremot inte i rutan c (den tredje utplacerade pärlan skulle då få tre grannar). Den högra figuren visar ett exempel där en kedja med pärlor i samma färg kan slutas; starten sker vid pilen och kedjan sluts genom att en pärla placeras i d-rutan. Vi observerar att varje påbörjad kedja måste slutas för att kvadraten ska kunna fyllas så att grannvillkoren är uppfyllda.



Eftersom varje kedja av pärlor i endera färgen är sluten, måste antalet pärlor i kedjan vara ett jämnt tal. Om vi från startrutan sammanlagt går h steg åt höger, måste vi också göra h steg åt vänster för att återkomma till startrutan; går vi sammanlagt n steg nedåt, måste vi av samma skäl också gå n steg uppåt. Totalt går vi alltså $2h+2n$ steg, vilket innebär att antalet pärlor i kedjan är $2h + 2n$ kulor, ett jämnt antal.
Om varje kedja innehåller ett jämnt antal pärlor och alla rutor är fyllda, måste följaktligen antalet rutor vara jämnt för att vi ska kunna lyckas. Alltså är det inte möjligt att fylla kvadraten om n är ett udda tal. Är det möjligt att fylla kvadraten om n är jämnt tal? Ja, vi kan exempelvis fylla alla kantrutor rutor med exempelvis blå pärlor; innanför ytterranden kan vi sedan fylla nästa rand med röda kulor och sedan fortsätta på samma sätt tills rutnätet är fyllt. Vi kommer då alltid att sluta med fyra rutor som bildar en kvadrat i mitten (för varje borttagen rand har vi hela tiden en kvadrat där sidan är jämn). Vi observerar att för $n = 2$ är de fyra pärlorna i samma färg. På nästa sida visas några varianter i fallet $n = 6$.



Låt oss ge ett alternativt bevis för att n inte kan vara udda. Betrakta för enkelhets skull fallet $n = 5$ (se figuren nedan). Antag att pärlan i ruta 1 är blå. Då måste också pärlorna i rutorna 2 och 3 vara blå enligt grannvillkoret. Pärlorna i rutorna 4 och 5 måste vidare vara röda, eftersom pärlan i ruta a måste omges av två röda och två blå pärlor. Om vi fortsätter på samma sätt finner vi att de båda diagonaler som omger huvuddiagonalen, markerad med den vänstra pilen, alternerar i färg på exakt samma sätt: blå, röd, blå, osv. (rutorna 2, 4, 6, 8 resp 3, 5, 7, 9). Men samma egenskap måste gälla även för den andra huvuddiagonalen, markerad med den högra pilen. Här får vi dock en motsägelse, eftersom de omgivande diagonalerna inte är lika och heller inte alternerar i färg. Detta är en följd av att vi i mitten har fyra rutor som var och en ligger på två korsande diagonaler (rutorna 4, 5, 6 och 7). Motsvarande resonemang är uppenbarligen giltigt för varje udda tal n.



Svar. Det är möjligt om och endast om n är ett jämnt tal.