SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Luleå den 24 november 2012

1. Funktionen f uppfyller villkoret

$$f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)},$$

för alla reella x, för vilka funktionen är definierad. Bestäm $f(2012)$, om det är känt att $f(1000) = 2012$.

2. Talet 201212200619 har en faktor m sådan att $6 \cdot 10^9 < m < 6,5 \cdot 10^9$. Bestäm m.

3. Kateterna AC och BC i en rätvinklig triangel ABC har längderna b och a, respektive. En cirkel med medelpunkt i C tangerar hypotenusan AB i punkten D. Tangenterna till cirkeln genom punkterna A och B träffar cirkeln i punkterna E och F, respektive (där E och F båda är skilda från D). Uttryck längden av sträckan EF som en funktion av a och b.

4. Givet att a är en reell lösning till polynomekvationen

$$nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x - 1 = 0, \quad n \text{ positivt heltal},$$

visa att $a = 1$, eller $-1 < a < 0$.

5. Hörnen i en regelbunden 13-hörning färgas i tre olika färger. Visa att det finns tre hörn som har fått samma färg och som utgör hörn i en likbent triangel.

6. En cirkel är inskriven i en parallelltrapets. Visa att parallelltrapetsens diagonaler skär varandra i en punkt som ligger på den diameter till cirkeln som är vinkelrät mot de två parallella sidorna.

Skrivtid: 5 timmar
Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!