SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 25 september 2012

Förslag till lösningar

1. Sex punkter som ligger på en cirkel betecknas i tur och ordning moturs med A, B, C, D, E och F. Om man har tre olika färger, på hur många sätt kan man färglägga de sex cirkelbågarna mellan intilliggande punkter så att AB och DE har samma färg, BC och EF har samma färg och CD och FA har samma färg, och intilliggande bågar är olikfärgade?

Lösning. Vi kan utan inskränkning anta att de tre färgerna är blå, gul och röd. Om bågen AB är blå, så är DE också blå. Bågen BC kan vara gul eller röd. Om BC är gul, så är EF gul, och bågen FA måste vara röd, eftersom den har en gul och en blå granne. Bågen CD är då också röd. Om BC och EF istället är röda, så fås på samma sätt som ovan att CD och FA är gula.

När vi väl valt bågen AB:s färg finns det alltså två olika sätt att färglägga resten av cirkeln. Eftersom vi har tre möjliga val för AB, får vi att det finns sex sätt att färglägga bågarna så att alla villkor uppfylls.

2. Ett taxibolag i landet Taxia tillämpar två olika prismodeller beroende på den fart man åker med. Resan kostar 30 cent per kilometer då taxibilen kör med en fart som är större än v_0 km i timmen, och 10 cent per minut under perioder då farten är lägre än v_0 km i timmen. Hur ska man välja v_0 så att priset vid resa med konstant fart v_0 blir lika stort med båda sätten att räkna?

Lösning. Om man färdas s km med farten v_0 km/h, så kommer resan enligt den första modellen att kosta $30s$ cent. Resan tar då $\frac{s}{v_0}\,\mathrm{h} = \frac{60s}{v_0}$ min, så att den enligt den andra modellen kommer att kosta $\frac{600s}{v_0}$ cent. För att priset ska bli lika stort oavsett vilken modell man väljer måste v_0 uppfylla

$$30s = \frac{600s}{v_0},$$

d.v.s. $v_0 = 20$ km/h.

3. Sidorna i en triangel har längderna a, b och $2b$ för två reella tal a och b som uppfyller likheten $\frac{1}{2b+a} + \frac{1}{2b-a} = \frac{4}{b}$. Bestäm triangelns vinklar.

Lösning. Vi börjar med att skriva vänsterledet i den givna likheten på gemensam nämnare

$$\frac{1}{2b+a} + \frac{1}{2b-a} = \frac{2b-a+2b+a}{4b^2-a^2} = \frac{4b}{4b^2-a^2} = \frac{4}{b},$$

vilket ger $b^2 = 4b^2 - a^2$, och $a^2 = 3b^2$. Vi får att triangelns sidlängder uppfyller $a^2+b^2 = 3b^2+b^2 = 4b^2 = (2b)^2$, vilket enligt omvändningen till Pythagoras sats medför att triangeln är rätvinklig, med rät vinkel mot sidan med längd $2b$. Spegla triangeln i kateten med längd $a = b\sqrt{3}$; resultatet blir en triangel med tre lika långa sidor. Därmed måste vinkeln mot kateten med längd $a = b\sqrt{3}$ vara $60°$, och den återstående vinkeln (mot kateten med längd b) måste då vara $30°$. Vinklarna i triangeln är alltså $30°, 60°$ och $90°$.

4. På en tavla står sex positiva heltal i rad. För vart och ett av talen, utom det sista, gäller att summan av det talet och det dubbla värdet av det nästföljande talet alltid är lika med 72. Bestäm de sex talen.

Lösning 1. Om de sex talen betecknas från vänster till höger med $a_1, a_2, \ldots, a_6$, så får vi ekvationssystemet

$$\begin{aligned} a_1 + 2a_2 &= 72 \\ a_2 + 2a_3 &= 72 \\ a_3 + 2a_4 &= 72 \\ a_4 + 2a_5 &= 72 \\ a_5 + 2a_6 &= 72. \end{aligned}$$

En lösning är uppenbarligen $a_1 = a_2 = \ldots = a_6 = 24$. För att ta reda på om det finns andra lösningar, låt oss ansätta $a_6 = 24 + a$, där a är ett heltal. Om vi löser ut de bekanta i termer av a, får vi

$$\begin{aligned} a_5 &= 72 - 2a_6 = 24 - 2a \\ a_4 &= 72 - 2(24 - 2a) = 24 + 4a \\ a_3 &= 72 - 2(24 + 4a) = 24 - 8a \\ a_2 &= 72 - 2(24 - 8a) = 24 + 16a \\ a_1 &= 72 - 2(24 + 16a) = 24 - 32a. \end{aligned}$$

För $a = 0$ får vi "jämviktslösningen" vi noterade tidigare. De var givet att de sex talen är positiva, alltså kan inte a vara ett positivt heltal (annars skulle a_1 bli ett negativt tal). Samma villkor säget att $24 + 16a > 0$, så att det enda heltalet a, förutom 0, för vilket alla sex talen blir positiva, är $a = -1$, och vi får ytterligare en lösning, nämligen $a_1 = 56,\ a_2 = 8,\ a_3 = 32,\ a_4 = 20,\ a_5 = 26,\ a_6 = 23$.

Lösning 2 (skiss). Vi tittar en gång till på ekvationssystemet ovan. Med början i den sista ekvationen kan vi successivt dra slutsatserna

$$a_5 \equiv 0 \pmod 2;\ a_4 \equiv 0 \pmod 4;\ a_3 \equiv 0 \pmod 8;\ a_2 \equiv 8 \pmod{16};\ a_1 \equiv 8 \pmod{16}.$$

De tal som kan komma ifråga för a_1 är då $8, 24, 40, 56$. De enda av dessa som ger $a_2 \equiv 8 \pmod{16}$ är $a_1 = 24$ (som leder till den första lösningen vi fick ovan) och $a_1 = 56$ (som leder till den andra).

5. Beteckna med $\lceil x \rceil$ det minsta heltal som är större än eller lika med x (t.ex. $\lceil 8 \rceil = 8$, $\lceil \pi \rceil = 4$). Hur många olika heltal finns bland talen

$$\left\lceil \frac{2012}{n} \right\rceil, \quad n = 1, 2, \ldots?$$

Lösning. Sätt $a_n = \dfrac{2012}{n}$ $n = 1, 2, 3, \ldots$. Här är $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ en avtagande följd. Om $a_n - a_{n+1} > 1$, så gäller att $\lceil a_n \rceil > \lceil a_{n+1} \rceil$, d.v.s. de två talen måste vara olika. Följden med element

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2012}{n(n+1)}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

är också avtagande. Därmed får vi att om $a_n - a_{n+1} < 1$ för något positivt heltal n, så gäller $a_m - a_{m+1} < 1$ för alla $m \geq n$. Efter ett visst n-värde kommer alltså alla tal ner till 1 att finnas med i listan. Det vi behöver hitta är just detta n-värde, d.v.s. det minsta positiva heltalet n sådant att $a_n - a_{n+1} < 1$. Vi har

$$a_n - a_{n+1} = \frac{2012}{n(n+1)} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad n^2 + n - 2012 > 0.$$

Funktionen $f(x) = x^2 + x - 2012$ antar positiva värden till vänster om sitt minsta nollställe och till höger om sitt största nollställe. Produkten av nollställena är negativ, alltså är det ena av dem negativt och det andra positivt. Vi behöver nu bestämma det minsta positiva heltalet som är större än eller lika med den positiva roten till andragradsekvationen $x^2 + x - 2012 = 0$. Denna rot är $\dfrac{-1 + \sqrt{8049}}{2} \approx 44,36$, och det minsta heltalet som är större är 45. Detta betyder att alla heltal från 1 till $\left\lceil \dfrac{2012}{45} \right\rceil = 45$ kommer att finnas med i listan. För alla $1 \leq n < 45$ kommer vi att ha $\lceil a_n \rceil > \lceil a_{n+1} \rceil$. Antalet olika tal i listan kommer alltså att vara $45 + 44 = 89$.

6. Betrakta alla punkter i planet som har heltalskoordinater. Ursprungligen tänker vi oss att alla dessa punkter är blåfärgade. Därefter färgas n^2 av dem röda, för något positivt heltal n. Ett *tvåfärgat grannpar* består av en röd och en blå punkt som befinner sig intill varandra i vertikalt eller horisontellt led (en punkt kan ingå i flera tvåfärgade grannpar). Visa att det finns åtminstone $4n$ tvåfärgade grannpar.

Lösning. Låt m beteckna antalet tvåfärgade grannpar. Notera att $m = 4n$ när alla röda punkter samlats i en kvadrat med sidan n. Vi ska visa att det är det minsta värde m kan anta.

Låt a respektive b beteckna antalet olika x-koordinater, respektive antalet olika y-koordinater som förekommer hos de röda punkterna. För ett givet "rött" x-värde finns (åtminstone) ett tvåfärgat grannpar som inkluderar den översta röda punkten och ett som inkluderar den nedersta röda punkten med den x-koordinaten (notera att det kan handla om en och samma röda punkt, men att det blir olika tvåfärgade grannpar). På samma sätt finns minst två tvåfärgade grannpar som motsvarar varje "röd" y-koordinat. Det gäller alltså att $m \geq 2a + 2b$. Vidare finns alla de röda punkterna bland de ab punkterna med en "röd" x- eller en "röd" y-koordinat, och det följer att $ab \geq n^2$. Observera nu att $4ab \leq (a-b)^2 + 4ab = (a+b)^2$, så att $4n \leq 4\sqrt{ab} = 2\sqrt{4ab} \leq 2\sqrt{(a+b)^2} = 2a + 2b \leq m$, och beviset är klart.