SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Luleå den 24 november 2012

1. Funktionen f uppfyller villkoret

$$f(x+1) = \frac{1+f(x)}{1-f(x)},$$

för alla reella x, för vilka funktionen är definierad. Bestäm $f(2012)$, om det är känt att $f(1000) = 2012$.

Lösning. Vi börjar med att undersöka hur $f(x+2)$ ser ut i termer av $f(x)$ $(\neq 0; 1)$:

$$f(x+2) = \frac{1 + \frac{1+f(x)}{1-f(x)}}{1 - \frac{1+f(x)}{1-f(x)}} = \frac{2}{-2f(x)} = -\frac{1}{f(x)}.$$

Det betyder att

$$f(x+4) = -\frac{1}{f(x+2)} = -\frac{1}{-\frac{1}{f(x)}} = f(x),$$

d.v.s. förutsatt att $f(x)$ finns och $f(x) \neq 0; 1$, så finns även $f(x+4)$, och $f(x+4) = f(x)$. Eftersom $2012 - 1000 = 1012 = 253 \cdot 4$, får vi

$$f(2012) = f(1000) = 2012.$$

2. Talet 201212200619 har en faktor m sådan att $6 \cdot 10^9 < m < 6,5 \cdot 10^9$. Bestäm m.

Lösning. Sätt $a = 201212200619$, och $k = \dfrac{a}{m}$. Ur olikheterna för m följer uppskattningen

$$\frac{201212200619}{6,5 \cdot 10^9} = 30,9\ldots < k < \frac{201212200619}{6 \cdot 10^9} = 33,5\ldots.$$

Eftersom k är ett heltal betyder det att $31 \leq k \leq 33$. Talet $a = km$ är udda, vilket utesluter $k = 32$. Dessutom är a inte delbart med 3, vilket i sin tur utesluter $k = 33$. Den enda möjligheten är då $k = 31$. Division ger

$$m = \frac{201212200619}{31} = 6490716149.$$

3. Kateterna AC och BC i en rätvinklig triangel ABC har längderna b och a, respektive. En cirkel med medelpunkt i C tangerar hypotenusan AB i punkten D. Tangenterna till cirkeln genom punkterna A och B träffar cirkeln i punkterna E och F, respektive (där E och F båda är skilda från D). Uttryck längden av sträckan EF som en funktion av a och b.

Lösning. Trianglarna AEC och ADC är kongruenta, och $\angle ACE = \angle ACD = \varphi$. Analogt gäller att $\triangle BCF \cong \triangle BCD$, och $\angle BCF = \angle BCD = \psi$. Eftersom $\varphi + \psi = \angle ACB = 90°$, får vi att $\angle ECF = 2\varphi + 2\psi = 180°$. Sträckan EF är alltså diameter i den givna cirkeln, och därmed gäller $|EF| = 2|CD|$. Det som återstår att göra är att uttrycka längden av höjden mot hypotenusan i termer av de två kateterna. Den givna triangelns area är $\frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}|AB| \cdot |CD| = \sqrt{a^2+b^2} \cdot |CD|$. Vi får alltså

$$|EF| = \frac{2ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

4. Givet att a är en reell lösning till polynomekvationen

$$nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x - 1 = 0, \quad n \text{ positivt heltal},$$

visa att $a = 1$, eller $-1 < a < 0$.

Lösning. Beteckna $p(x) = nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} - \cdots - x - 1$. Vi har då $p(x) = (x^n - x^{n-1}) + (x^n - x^{n-2}) + \cdots + (x^n - x) + (x^n - 1)$.
Uppenbarligen gäller $p(1) = 0$, $p(0) \neq 0$. För $a > 1$ är alla skillnader av typen $a^n - a^k$, för $0 \leq k < n$, positiva, vilket betyder att $p(a) > 0$ för $a > 1$. För $0 < a < 1$ är alla skillnader av ovan beskrivna typ negativa, så att $p(a) < 0$ för $0 < a < 1$. Ekvationen har alltså en enda icke-negativ lösning, nämligen $x_0 = 1$.
För $a < 0$, skriver vi om ekvationen och använder triangelolikheten:

$$nx^n = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1,$$

och

$$\begin{aligned}|nx^n| = n|x|^n &\leq |x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1| \leq \\ &\leq |x^{n-1}| + |x^{n-2}| + \cdots + |x| + 1 = |x|^{n-1} + |x|^{n-2} + \cdots + |x| + 1.\end{aligned}$$

För $a < -1$ gäller att $|a|^n > |a|^k$, för $0 \leq k < n$. Detta tillsammans med olikheten ovan visar att ekvationen inte har några lösningar som är mindre än -1. Det återstår att titta på $p(-1)$. Eftersom summan av en jämn och en udda potens av -1 alltid är 0, får vi att $p(-1) = n$ för n jämnt, och $p(-1) = -n-1$, för n udda.

Därmed har vi visat att om a är en reell lösning till ekvationen $p(x) = 0$, så gäller $a = 1$, eller $-1 < a < 0$.

5. Hörnen i en regelbunden 13-hörning färgas i tre olika färger. Visa att det finns tre hörn som har fått samma färg och som utgör hörn i en likbent triangel.

Lösning. Beteckna 13-hörningens hörn med $P_1, P_2, \ldots, P_{13}$, där numreringen är gjord så att man med stigande nummer går moturs, eller medurs.

Det måste finnas fem hörn i 13-hörningen som har fått samma färg, säg röd. Då måste två av dessa ligga bredvid varandra, eller med exakt ett hörn av annan färg emellan.

Antag att det inte finns någon likbent triangel med hörn bland de fem röda hörnen. Då kan det inte finnas tre röda hörn i rad.

Fall 1. Två röda hörn ligger bredvid varandra: kalla dessa P_1 och P_2. Då måste P_3, P_{13} och P_8 ha annan färg. För de tre återstående röda punkterna av den finns nu två möjligheter: antingen ligger alla tre på samma sida om triangeln $P_1P_2P_8$ (*fall 1.1*), eller också ligger två av dem på ena sidan och två på den andra (*fall 1.2*).

Fall 1.1. Möjligheterna för de tre återstående röda punkterna är P_4, P_5, P_7, och P_4, P_6, P_7. I båda fallen är triangeln $P_1P_4P_7$ likbent, en motsägelse.

Fall 1.2. Två av punkterna $P_4 - P_7$, och en av $P_9 - P_{12}$ är röda. Paren (P_4, P_6) och (P_4, P_7) leder till motsägelse (trianglarna $P_2P_4P_6$, resp. $P_1P_4P_7$). Då återstår paren $(P_4, P_5), (P_5, P_6), (P_5, P_7), (P_6, P_7)$. Nedan redovisas hur man får motsägelse (vi redovisar endast de röda punkternas nummer):

$1, 2, 4, 5, 9:$ $1, 4, 9$ likbent; $1, 2, 4, 5, 10:$ $5, 1, 10$ likbent; $1, 2, 4, 5, 11:$ $4, 1, 11$ likbent; $1, 2, 4, 5, 12:$ $5, 2, 12$ likbent; $1, 2, 5, 6, 9:$ $1, 5, 9$ likbent; $1, 2, 5, 6, 10:$ $2, 6, 10$ likbent; $1, 2, 5, 6, 11:$ $1, 6, 11$ likbent; $1, 2, 5, 6, 12:$ $5, 6, 12$ likbent; $1, 2, 5, 7, 9:$ $1, 5, 9$ likbent; $1, 2, 5, 7, 10:$ $5, 1, 10$ likbent; $1, 2, 5, 7, 11:$ $2, 7, 11$ likbent; $1, 2, 5, 7, 12:$ $5, 2, 12$ likbent; $1, 2, 6, 7, 9:$ $1, 6, 9$ likbent; $1, 2, 6, 7, 10:$ $2, 6, 10$ likbent; $1, 2, 6, 7, 11:$ $1, 6, 11$ likbent; $1, 2, 6, 7, 12:$ $2, 7, 12$ likbent.

Fall 2. Det ligger inga två röda punkter intill varandra; då måste det finnas två röda punkter med exakt en punkt av annan färg emellan. Låt P_2 och P_{13} vara röda, medan P_1, P_3, P_{12} har annan färg. Punkterna P_4 och P_{11} kan inte vara röda heller. Möjligheterna för de tre återstående röda hörnen är $(P_5, P_7, P_9), (P_5, P_7, P_{10}), (P_5, P_8, P_{10}), (P_6, P_8, P_{10})$. Nedan redovisas hur man får motsägelse i varje enskilt fall:

$13, 2, 5, 7, 9:$ $5, 7, 9$ likbent; $13, 2, 5, 7, 10:$ $7, 10, 13$ likbent; $13, 2, 5, 8, 10:$ $2, 5, 8$ likbent; $13, 2, 6, 8, 10:$ $2, 6, 10$ likbent.

Vi fick motsägelse i varje enskilt fall. Detta visar att vårt antagande var falskt, d.v.s. det går alltid att välja tre hörn av samma färg som bildar en likbent triangel.

6. En cirkel är inskriven i en parallelltrapets. Visa att parallelltrapetsens diagonaler skär varandra i en punkt som ligger på den diameter till cirkeln som är vinkelrät mot de två parallella sidorna.

Lösning. Låt $ABCD$ vara parallelltrapetsen, $AB \| CD$. Beteckna med P, respektive Q, punkten i vilken den inskrivna cirkeln tangerar AB, respektive CD. Sträckan PQ är då den diameter i den inskrivna cirkeln som är vinkelrät mot de två parallella sidorna. Låt S', respektive S'', vara skärningspunkten mellan diagonalen AC, respektive BD, och PQ. Det räcker att visa att

$$\frac{|PS'|}{|S'Q|} = \frac{|PS''|}{|S''Q|}.$$

Av likheten ovan följer att $S' = S'' = S$, och att punkten S ligger såväl på båda diagonalerna som på diametern PQ, vilket bevisar påståendet.

Trianglarna APS' och CQS' är likformiga, enligt topptriangelsatsen. Det medför att

$$\frac{|PS'|}{|QS'|} = \frac{|AP|}{|CQ|}.$$

På samma sätt fås att

$$\frac{|PS''|}{|S''Q|} = \frac{|BP|}{|DQ|}.$$

Det betyder att vi kommer att ha visat den önskade likheten om vi lyckas visa att $|AP| \cdot |DQ| = |BP| \cdot |CQ|$.

Beteckna $|AP| = x, |PB| = y, |CQ| = z, |QD| = t$. Vi har då att $|AD| = x + t$, och $|BC| = y + z$. Dra höjder mot AB från C och D. Pythagoras' sats ger

$$(x+t)^2 - (\pm(x-t))^2 = (y+z)^2 - (\pm(y-z))^2.$$

(Tecknet i $\pm$ beror på vilken av de två inblandade sträckorna som är längst.) Likheten ger $xt = yz$, vilket är exakt vad som återstod att bevisa.