SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Finaltävling i Lund den 20 november 2010

1. Finns det en triangel vars tre höjder har måtten 1, 2 respektive 3 längdenheter?

2. Betrakta fyra linjer $y = kx - k^2$ för olika heltal k. Fyra olika punkter (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$, är sådana att var och en tillhör två olika linjer och på varje linje ligger precis två av dem.
Låt $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$. Visa att $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$ och $y_1 y_4 = y_2 y_3$.

3. Finn alla naturliga tal $n \geq 1$ sådana att det finns ett polynom $p(x)$ med heltalskoefficienter för vilket $p(1) = p(2) = 0$ och där $p(n)$ är ett primtal.

4. Vi skapar en talföljd genom att sätta $a_1 = 2010$ och kräva att a_n är det minsta tal som är större än a_{n-1} och dessutom är delbart med n. Visa att a_{100}, a_{101}, $a_{102}, \ldots$ bildar en aritmetisk talföljd.

5. Betrakta mängden av trianglar där sidlängderna uppfyller
$$(a + b + c)(a + b - c) = 2b^2.$$
Bestäm vinklarna i den triangel för vilken vinkeln mitt emot sidan med längden a är så stor som möjligt.

6. Ett ändligt antal rutor på ett oändligt rutat papper är målade röda. Visa att man på papperet kan rita in ett antal kvadrater, med sidor utefter rutnätets linjer, sådana att:
   (1) ingen ruta i nätet tillhör mer än en kvadrat (en kant kan däremot tillhöra mer än en kvadrat),
   (2) varje *röd* ruta ligger i någon av kvadraterna och antalet röda rutor i en sådan kvadrat är minst $\frac{1}{5}$ och högst $\frac{4}{5}$ av antalet rutor i kvadraten.

Skrivtid: 5 timmar
Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!