SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Umeå den 18 november 2017

1. Ett visst spel för två spelare går till på följande sätt: Ett mynt placeras på den första rutan i en rad med nio rutor. Spelarna Xenia och Yngve turas om att göra något av följande drag: flytta myntet framåt ett steg, flytta myntet framåt fyra steg, eller flytta myntet bakåt två steg. För att ett drag ska vara tillåtet måste myntet landa på någon av de nio rutorna. Man vinner om man flyttar myntet till den nionde rutan.

Vem vinner, givet att Xenia gör det första draget, och båda spelarna spelar optimalt?

2. Låt p vara ett primtal. Bestäm alla par av relativt prima positiva heltal (m, n), sådana att
$$\frac{p+m}{p+n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{p^2}.$$

3. Sträckorna AB och CD ligger i rummet, inte nödvändigtvis i samma plan. Punkten X är mittpunkt på sträckan AB, och punkten Y är mittpunkt på CD. Givet att punkten X inte ligger på linjen CD, och att punkten Y inte ligger på linjen AB, visa att
$$2|XY| \leq |AD| + |BC|.$$
När uppnås likhet?

4. Låt D vara fotpunkten för höjden mot BC i triangeln ABC. Låt E vara skärningen mellan AB och bisektrisen till C. Anta att vinkeln $\angle AEC = 45°$. Bestäm vinkeln $\angle EDB$.

5. Bestäm en konstant C sådan att
$$\frac{S}{ab+bc+ca} \leq C,$$
där a, b, c är sidlängderna i en godtycklig triangel, och S är samma triangels area. (Full poäng ges för den bästa möjliga konstanten, med motivering.)

6. Låt a, b, c, x, y, z vara reella tal sådana att $x+y+z = 0$, $a+b+c \geq 0$, $ab+bc+ca \geq 0$. Visa att
$$ax^2 + by^2 + cz^2 \geq 0.$$

Skrivtid: 5 timmar
Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!