SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Uppsala den 24 november 2018

1. Låt $ABCD$ vara en fyrhörning utan parallella sidor, som är inskriven i en cirkel. Låt P och Q vara skärningspunkterna mellan linjerna som innehåller fyrhörningens motstående sidor. Visa att bisektriserna till vinklarna vid P och Q är parallella med bisektriserna till vinklarna vid skärningspunkten mellan fyrhörningens diagonaler.

2. Hitta alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som uppfyller

$$f(x) + 2f(\sqrt[3]{1 - x^3}) = x^3$$

för alla reella x. (Här är $\sqrt[3]{x}$ definierad på hela $\mathbb{R}$.)

3. Låt m vara ett positivt heltal. Ett m-*mönster* är en sekvens av m strikta olikhetssymboler. Ett m-mönster sägs *realiseras* av en följd av $m + 1$ reella tal om talen uppfyller var och en av olikheterna i den givna ordningen. (Exempelvis realiseras 5-mönstret $<, <, >, <, >$ av talföljden $1, 4, 7, -3, 1, 0$.)
Givet m, vilket är det minsta heltal n för vilket det existerar någon talföljd $x_1, \ldots, x_n$ sådan att varje m-mönster realiseras av en delföljd $x_{i_1}, \ldots, x_{i_{m+1}}$ med $1 \leq i_1 < \cdots < i_{m+1} \leq n$?

4. Finn det minsta positiva heltalet n med egenskapen: Bland godtyckligt valda n på varandra följande positiva heltal, alla mindre än 2018, finns minst ett som är delbart med sin siffersumma.

5. I en triangel ABC dras två linjer som tillsammans tredelar vinkeln vid A. Dessa skär sidan BC i punkterna P och Q så att P ligger närmre B och Q ligger närmre C. Bestäm den minsta konstant K sådan att

$$|PQ| \leq K(|BP| + |QC|),$$

för alla sådana trianglar. Avgör om det finns trianglar för vilka likhet gäller.

6. För vilka positiva heltal n kan polynomet

$$p(x) = 1 + x^n + x^{2n}$$

skrivas som en produkt av två polynom med heltalskoefficienter (av grad ≥ 1)?

Skrivtid: 5 timmar
Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!