SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska matematikersamfundet

Finaltävling i Linköping den 19 november 2011

1. Bestäm alla positiva heltal k, l, m och n, sådana att

$$\frac{1}{k!} + \frac{1}{l!} + \frac{1}{m!} = \frac{1}{n!}\,.$$

2. Givet en triangel ABC, låt P vara en punkt innanför triangeln sådan att $|BP| > |AP|$, $|BP| > |CP|$. Visa att $\angle ABC < 90°$.

3. Finn alla positiva reella tal x, y, z, sådana att

$$x - \frac{1}{y^2} = y - \frac{1}{z^2} = z - \frac{1}{x^2}\,.$$

4. Städerna A, B och C är förenade med ett telekabelnät. Om man exempelvis vill skicka ett meddelande från A till B tilldelas man antingen en direktlinje mellan A och B, eller, vid behov, en linje via C. Det finns 43 linjer mellan A och B, inklusive dem som går via C, och 29 linjer mellan B och C, inklusive dem som går via A. Hur många linjer kan det finnas mellan A och C (inklusive dem som går via B)?

5. Arne och Bertil spelar ett spel på ett 11×11 stort rutbräde. Arne börjar. Han har en spelpjäs som i spelets början är placerad på mittrutan. I varje drag flyttar han pjäsen ett steg horisontellt eller vertikalt. Bertil placerar i varje drag ut en vägg längs någon av en valfri rutas fyra sidor. Arne får inte flytta sin pjäs genom en vägg. Arne vinner om han lyckas fly från brädet, medan Bertil vinner om han lyckas förhindra att Arne flyr. Vem vinner om det från början inte finns några väggar på spelplanen och båda spelarna spelar optimalt?

6. Hur många funktioner f finns det som är definierade i mängden av alla icke-negativa heltal, med värden i samma mängd, och sådana att de uppfyller $f(0) = 2011$, $f(1) = 111$, och

$$f(\max\{x + y + 2, xy\}) = \min\{f(x + y), f(xy + 2)\},$$

för alla icke-negativa heltal x, y?

Skrivtid: 5 timmar
Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!